

UNIVERSITE DE GENEVE

ECOLE DE PSYCHOLOGIE
ET DES SCIENCES DE
L'EDUCATION

L'ENSEIGNEMENT DE LA MATHÉMATIQUE

Contribution à la réalisation d'une réforme de l'enseignement
à l'école primaire

THÈSE

PRESENTÉE A L'ECOLE DE PSYCHOLOGIE ET DES SCIENCES DE L'EDUCATION
DE L'UNIVERSITE DE GENEVE
POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR EN PEDAGOGIE

PAR
Raymond HUTIN
de
Dardagny (Genève)

THESE N° 26

VEVEY
Editions DELTA S.A.
1974



Digitized by the Internet Archive
in 2026

R. HUTIN

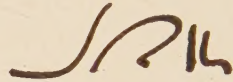
L'ENSEIGNEMENT DE LA MATHÉMATIQUE

IMPRIMATUR

L'Ecole de psychologie et des sciences de l'éducation, sur le préavis d'une commission formée par MM. S. ROLLER, L. PAULI et L. MASSARENTI, autorise l'impression de la présente thèse intitulée :

L'ENSEIGNEMENT DE LA MATHEMATIQUE

Contribution à la réalisation d'une réforme de l'enseignement à l'école primaire, sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont énoncées.



S. Roller
Directeur de thèse

Le 1er février 1974

UNIVERSITE DE GENEVE

ECOLE DE PSYCHOLOGIE
ET DES SCIENCES DE
L'EDUCATION

L'ENSEIGNEMENT DE LA MATHÉMATIQUE

Contribution à la réalisation d'une réforme de l'enseignement
à l'école primaire

THÈSE

PRESENTÉE A L'ECOLE DE PSYCHOLOGIE ET DES SCIENCES DE L'EDUCATION
DE L'UNIVERSITE DE GENEVE
POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR EN PÉDAGOGIE

PAR
Raymond HUTIN

de
Dardagny (Genève)

THESE N° 26

VEVEY
Editions DELTA S.A.
1974

Ma reconnaissance va à Monsieur Samuel ROLLER, directeur de l'Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques, ancien directeur du Service de la recherche pédagogique de Genève, pour la confiance qu'il m'a témoignée à l'origine de la recherche et les conseils judicieux qu'il m'a prodigués ainsi qu'à Monsieur Laurent PAULI, professeur à l'Ecole de psychologie et des sciences de l'éducation, pour l'appui qu'il m'a apporté et l'intérêt bienveillant dont il a fait preuve tout au long de l'avancement des travaux.

J'adresse également mes vifs remerciements à Monsieur René JOTTERAND, secrétaire général du Département de l'Instruction publique, président de la commission genevoise de la recherche en matière d'éducation, pour son soutien constant ainsi qu'aux directions d'enseignement primaire et secondaire qui ont accepté de mettre les élèves à ma disposition lors des passages des tests.

Ma gratitude la plus vive va à Monsieur Armand CHRISTE, directeur de l'enseignement primaire genevois, qui non seulement m'a accordé son entière confiance et la plus grande liberté pour la réalisation de l'expérimentation, puis de la réforme de l'enseignement, mais a mis à ma disposition les collaboratrices indispensables pour la formation du corps enseignant. Qu'il trouve ici l'expression de mes plus vifs remerciements.

Je remercie aussi très vivement les nombreux instituteurs, institutrices et maîtresses enfantines genevois ainsi que le corps des inspecteurs scolaires qui ont participé très activement à l'expérience et m'ont fait bénéficier de leurs conseils éclairés.

Enfin mes remerciements les plus sincères s'adressent à mes collègues et à mes collaborateurs du Service de la recherche pédagogique de Genève qui, chacun selon sa compétence, m'ont apporté leur enthousiasme, leur énergie, leurs qualités. C'est en grande partie grâce à eux que, sur tous les plans, le pari qui consistait à entreprendre une profonde réforme de l'enseignement sur une très vaste échelle tout en réservant les exigences de la recherche scientifique et celles de la réalité scolaire quotidienne a pu être tenu.



INTRODUCTION

1. POSITION DU PROBLEME

1.1 Généralités

La recherche pédagogique, cette jeune science, a-t-elle atteint un niveau de développement suffisant, découvert des moyens efficaces, acquis assez de prestige pour que sa place et son rôle dans la formidable mutation que subit le monde, et avec lui l'école, trouve sa justification. Telle est la question que peut se poser le chercheur lorsqu'il entreprend une étude visant à la modification d'un petit secteur de l'édifice scolaire.

Secoué de toutes parts, chargé des plus grands maux, remis en question dans les milieux les plus divers, cet édifice si patiemment construit au cours des siècles tend à se lézarder profondément.

Cette situation préoccupante nous conduit, avant de situer les objectifs et les limites d'une recherche, à un bref examen des données qui entrent en jeu dans les problèmes relatifs aux finalités de l'action éducative et plus précisément de l'action scolaire. Il serait vain, en effet, d'entreprendre une étude visant à la réforme de l'enseignement dans un domaine très limité sans que cet effort soit situé dans le grand courant des transformations du monde contemporain.

De tous temps, à côté des connaissances directement utilisables, qui s'apparentaient déjà à une formation professionnelle, l'école a eu pour mission de transmettre des valeurs historiques, portées de génération en génération. Cet attachement à des valeurs jugées sûres lui a valu d'être constamment en retard sur son temps.

Un exemple suffira à illustrer notre propos. Si nous examinons les manuels de lecture en usage dans la plupart des écoles élémentaires, nous constatons que le souci d'avoir recours à des auteurs éprouvés par le temps fait que l'enfant apprend à lire des textes qui lui présentent un monde que, bien souvent, ses parents eux-mêmes n'ont pas connu.

Cependant, depuis la généralisation de la scolarité jusqu'à un passé fort récent, ce retard de l'école par rapport au monde ne tirait guère à conséquence : la lenteur de l'évolution de la société et du développement de la connaissance permettait de maintenir ce décalage dans des limites supportables.

Il en va aujourd'hui tout autrement. De nombreux facteurs concourent à placer l'école dans une situation particulièrement difficile.

Notre recherche concernant l'enseignement de la mathématique à l'école primaire, c'est dans cette perspective que nous allons tenter de dégager quelques-unes des lignes de force qui conditionnent les transformations du système scolaire.

Il apparaît aujourd'hui comme un truisme de déclarer que l'école n'est pas adaptée aux besoins du monde contemporain. L'école primaire, en particulier, a conservé la plupart des caractéristiques qui l'ont marquée à l'origine de la scolarité obligatoire. Ces caractéristiques peuvent se résumer en deux points. Premièrement l'école primaire devait apprendre à la masse des élèves à lire, à écrire et à compter. Elle leur donnait ainsi les moyens de communiquer avec leurs semblables et de résoudre les problèmes élémentaires de la vie quotidienne. Deuxièmement, elle devait permettre à une élite restreinte de se dégager afin de poursuivre des études plus longues. Selon Alain :

" Il y a un enseignement monarchique, j'entends un enseignement qui a pour objet de séparer ceux qui sauront et gouverneront de ceux qui ignoreront et obéiront... Il semble que le professeur ait pour tâche de choisir, dans la foule, une élite, et de décourager et rabattre les autres. " (1)

Le phénomène le plus important dans l'inadéquation de l'école au monde actuel paraît bien être le développement exponentiel de la connaissance et l'accélération vertigineuse des découvertes technologiques. Ce sont, semble-t-il, ces deux phénomènes qui, par l'élévation du niveau général de vie, provoquent du même coup l'aspiration de la société vers une scolarisation toujours plus poussée, avec les problèmes que posent la démocratisation des études d'une part et l'inadaptation de la production du système scolaire aux besoins de l'économie d'autre part.

Dans la préface de "La Suisse au devant de l'éducation permanente" (2) H.P. Tschudi, conseiller fédéral, déclare :

" Les temps modernes sont caractérisés par la pénétration de la technique et de la science dans les domaines les plus divers de la vie, par la croissance toujours plus rapide des connaissances dans toutes les disciplines scientifiques et tous les secteurs

professionnels. Il s'ensuit que la plupart des personnes appartenant à ce qu'on appelle la population active, quelle que soit leur position, doivent faire face à des exigences tellement accrues que l'on peut parler d'une véritable "intellectualisation des professions."

Dans le même ordre d'idée, J. Fournier écrit :

"L'augmentation prodigieuse du capital de connaissance et de savoir-faire qui sous-tend l'organisation sociale et son obsolescence accélérée accroissent dans des proportions considérables la masse de ce qui est à apprendre. Pour autant que l'on puisse considérer ces données comme exactes - elles le sont en tant qu'ordre de grandeur - la somme des connaissances humaines double en quelques années alors qu'il fallait autrefois des siècles pour atteindre ce résultat. Ces connaissances se renouvellent et se périment à une cadence extrêmement rapide, qui nécessite, et nécessitera de plus en plus, plusieurs apprentissages au cours d'une vie humaine." (3)

Ces faits expliquent, dans une large mesure, la remise en question de la société dans laquelle nous vivons. L'homme moyen, à la fois connaît bien plus de choses qu'auparavant et en même temps prend conscience avec angoisse de son inadaptation à l'évolution du monde. L'une des conséquences en est la demande de plus en plus forte d'enseignement et d'éducation, le développement de l'éducation permanente, l'accroissement légitime des ambitions des parents pour la scolarité de leurs enfants.

Du même coup, on assiste à une prise de conscience de plus en plus nette du retard et de l'inadaptation quasi insupportable du système scolaire par rapport aux besoins de l'homme.

Jusqu'à une période relativement récente, l'école pouvait se satisfaire de son caractère élitiste. Par des sélections successives, de plus en plus restreintes, un petit nombre d'élèves parvenait à l'université. Ce faible pourcentage suffisait amplement à couvrir les besoins de la société qui pouvait ainsi se contenter d'une sélection très approximative et peu valide qui, si elle avait pour les uns l'inconvénient de favoriser certains types d'intelligence appelés scolaires et de faire jouer un rôle sélectif disproportionné à l'expression verbale, avait pour d'autres le mérite de maintenir dans les emplois subalternes un potentiel d'aptitudes intellectuelles important.

Il n'est pas ici le lieu de discuter des bienfaits ou des méfaits de ce système qui paraît avoir correspondu à un certain type d'organisation politique mais de constater que la société elle-même ne s'en accommode plus. Les études portant sur le rôle du milieu socio-culturel de l'enfant, quant à son développement intellectuel, ne permettent plus d'accepter comme naturelle l'inégalité des chances d'accès aux études supérieures. L'accroissement phénoménal des besoins d'éducation de l'ensemble de la population et l'augmentation des capacités intellectuelles exigées de la masse des travailleurs par le développement de la technologie impliquent, de manière urgente, une adaptation de l'école à la fois qualitative et quantitative.

Il faut apprendre plus, mieux, et à un plus grand nombre.

Nous avons employé ici le mot apprendre comme un synonyme d'enseigner. Ceci nous amène à évoquer un autre problème. Face au développement considérable des masses-médias, l'école est-elle encore en mesure d'enseigner, c'est-à-dire d'apporter la connaissance à l'élève ou son rôle n'est-il pas, selon la formule consacrée, d'"apprendre à apprendre", d'enseigner à l'enfant et à l'adolescent l'organisation, le tri, le classement, l'analyse des objets ou des faits, d'exercer son jugement à propos de données qu'il a en très grande majorité obtenues en dehors de l'école ?

De plus en plus, et ceci dès le début de la scolarité, le rôle principal de l'enseignant consistera à aider l'enfant dans l'élaboration de sa propre propédeutique de l'acte d'apprentissage.

C'est ce que disait déjà R. Dottrens il y a près de trente ans :

"Ce dont nous avons besoin, c'est d'une éducation qui ne se propose plus le savoir, mais le pouvoir, qui fasse acquérir une méthode de travail, une culture de l'esprit, le sens de la vie, et non plus un fatras de notions trop vite oubliées; une éducation fonctionnelle comme on dit en langage technique : non plus apprendre et obéir seulement, mais apprendre à apprendre et apprendre à se conduire.

Apprendre à apprendre : rendre à l'intelligence sa fonction propre qui est de permettre à l'individu de s'adapter et de trouver les solutions aux problèmes que la vie lui pose ; utiliser rationnellement la mémoire, non pour lui confier hâtivement et pour un temps des notions qu'on se dépêchera d'oublier.. mais organiser solidement les souvenirs pour retrouver au moment voulu ce dont on a besoin pour l'exigence du moment ! " (4)

Combien ces paroles prennent-elles aujourd'hui une valeur prophétique. Si, en 1946, il paraissait difficile de prévoir quels seraient les besoins de la société en 1970, il est encore bien plus vain d'essayer d'imaginer ce que devront connaître l'homme et la femme de l'an 2000. Les enfants qui entrent à l'école aujourd'hui, encore plus que ceux d'hier, doivent être préparés au changement, doivent être engagés dans un processus d'apprentissage qui se poursuivra leur vie durant. Ils ne pourront pas, comme ce fut trop longtemps et comme c'est encore le cas pour trop d'élèves aujourd'hui, pousser un ouf de soulagement au terme d'une scolarité au cours de laquelle l'échec et le sentiment de frustration fut leur compagnon quotidien. Leur qualité principale ne consistera pas en un savoir, quel qu'il soit, mais essentiellement en une capacité d'adaptation, une méthode de travail intellectuel, ou pour employer la terminologie actuelle, une plasticité, une aptitude à la créativité.

Les lignes générales du problème étant ainsi brièvement posées, il convient de préciser quelques-unes des contraintes qui pèsent sur le système scolaire.

La première contrainte provient de l'importance de l'enjeu. En matière d'éducation, il n'est pas possible, sciemment, de courir des risques. A n'importe quel moment de sa scolarité, l'enfant est en droit de recevoir du maître le meilleur enseignement possible. Les modifications du système sont toujours extrêmement prudentes, donc très lentes.

La deuxième contrainte, liée d'ailleurs à la première, ressort de l'attachement de l'homme aux valeurs du passé. Pour la plupart des humains, l'âge d'or est derrière et non devant. Il ne manque pas de Cassandre pour prédire les plus grands maux de toute innovation pédagogique. Les parents, les maîtres eux-mêmes souvent, sont extrêmement réticents au changement.

Cette réticence est d'autant plus réelle que les sciences pédagogiques, encore balbutiantes, ne fournissent pas la caution solide que la science joue dans d'autres disciplines. On ne discute pas l'avis du médecin, on n'apprend pas la loi au juriste mais tout un chacun se sent éducateur et s'estime capable de donner un avis autorisé sur la plupart des objets de l'éducation. Les enseignants eux-mêmes n'échappent pas à ce travers. Il n'est pas rare de rencontrer, jusqu'au sein de certaines commissions très officielles, des gens parfaitement compétents dans leur propre domaine mais totalement ignorants du sujet débattu.

Ce caractère n'explique-t-il pas partiellement le phénomène relevé avec pertinence par J. Piaget :

"Le problème général est de comprendre pourquoi l'immense cohorte des éducateurs, qui travaillent dans le monde entier avec tant de dévouement et en général de compétence, n'engendre pas une élite de chercheurs qui fassent de la pédagogie une discipline à la fois scientifique et vivante au même titre que toutes les disciplines appliquées participant à la fois de l'art et de la science ?

La raison en tient-elle à la nature de la pédagogie elle-même, en ce sens que ses lacunes proviendraient de l'impossibilité de trouver un équilibre stable entre les données scientifiques et les applications sociales." (5)

Nous sommes ainsi amenés à insister sur notre méconnaissance des phénomènes éducatifs. Il est relativement aisé de constater que, dans nombre de ses aspects, l'école ne répond pas à notre attente. Il est encore plus facile, de porter un jugement négatif sur l'activité des enseignants, sur les structures scolaires, voire sur la société qui les a conçues et que, par réciprocité elles contribuent à maintenir.

Il est encore possible de concevoir des modifications, de proposer des solutions, de suggérer des initiatives dans un cadre limité, en s'attachant à un problème spécifique.

Mais il est extrêmement hasardeux de prévoir les effets à long terme des changements envisagés. Grâce aux travaux récents, et en particulier à ceux de l'école de Genève, nous commençons à connaître la psychologie de l'enfant, les théories de l'apprentissage se développent, la cybernétique nous conduit à une définition plus rigoureuse des objectifs, la technologie pénètre à l'école, mais la relation entre les différents éléments du système d'éducation nous échappe encore et force nous est de reconnaître que les paroles sévères que R. Dottrens prononçait en 1946 se justifieraient encore dans bien des cas :

"Dans l'instruction publique, on ne fait jamais de bilan; on a adopté la forme de contrôle la plus néfaste et la plus insuffisante qui soit : les notes et les examens et l'on continue à se satisfaire de conditions de travail sans rapport avec les possibilités et les exigences de ce temps....

... Les éducateurs sont victimes de la formation qu'on leur a donnée : une culture qui a développé en eux la conviction que lorsque l'on parle on agit; que lorsque l'on discute on réalise ; qu'émettre des opinions personnelles équivaut à formuler des jugements objectifs ; que les réalistes qui ne se satisfont pas de discours ou d'affirmations gratuites, sont des béotiens; que ceux qui demandent le contrôle des faits et la production de preuves veulent mécaniser l'éducation...

...C'est pourquoi chacun se croit autorisé en toute bonne conscience à persévérer dans sa propre voie et à suivre ses tendances. L'opinion personnelle tient lieu de preuve et la conviction justifie la persévérance dans la réussite mais aussi dans l'insuffisance ou l'erreur." (6)

Qu'on ne nous fasse pas dire que l'école, dans les derniers vingt-cinq ans, n'a subi ni changements, ni améliorations! Mais les transformations apportées auraient pu, auraient dû être plus efficaces et plus rationnelles, si elles avaient été en mesure de s'appuyer sur des données scientifiques rigoureuses plutôt que sur un empirisme aussi éclairé fût-il.

1.2 Rôle de la recherche pédagogique

Ceci nous ramène à notre question initiale : la recherche pédagogique est-elle à même d'agir sur le système scolaire ? Il faut bien admettre que si, d'une manière générale, chacun s'accorde à reconnaître le rôle important que pourrait jouer une approche scientifique du phénomène d'éducation, celle-ci se situe davantage dans les mots, dans les souhaits, dans les désirs que dans les faits. Et pourtant c'est elle seulement qui permettrait une évaluation véritable de l'impact et des effets des réels efforts que tous les pays du monde font en faveur de l'éducation.

Dans son cours inaugural à l'Université de Lausanne, S. Roller déclarait :

"L'éducation, promue au rang de tâche majeure de l'humanité, est chose trop grave pour qu'on puisse tolérer qu'elle soit abandonnée aux aléas de l'empirisme. Une réflexion dès lors s'impose qu'il faut conduire selon les règles que se sont données les hommes de science, celles de la recherche expérimentale." (7)

Citons encore S. Spaulding :

"Les recherches les plus utiles aux enseignants ont été celles qui ont abouti à la création d'un "produit". De multiples recherches et essais ont été faits sur le nouveau matériel d'enseignement des sciences et des mathématiques. Il en est résulté non pas un compte rendu de recherches qu'on s'efforce de diffuser parmi les maîtres, mais un matériel didactique, à l'usage des maîtres et des élèves, qui exprime les résultats des recherches sous une forme directement utilisable dans la pratique. Ces "produits" de la recherche peuvent assurément entraîner des modifications dans les classes et dans l'activité des écoles normales." (8)

Il apparaît pourtant clairement que la recherche pédagogique n'a pas encore atteint pleinement droit de cité. Dans la même publication, nous lisons, sous la plume du tchèque J. Kotasek :

"Cependant, même si l'on reconnaît qu'il est possible que la recherche pédagogique ait un caractère vraiment scientifique, on peut se demander si les connaissances ainsi obtenues sont applicables à des situations pédagogiques concrètes. A cet égard, le caractère souvent fragmentaire et dispersé des connaissances, ainsi que la méthode essentiellement statistique employée pour les obtenir, doivent inciter à la prudence. Non seulement, en effet, le processus de l'éducation est un processus humain et social complexe mais encore l'éducation revêt la forme d'une rencontre personnelle entre le maître et l'enfant et n'est donc pas assimilable à un processus technologique impersonnel." (9)

Toute différente est la position de E. Planchard :

"Tout d'abord, l'objet même de la pédagogie expérimentale, limité qu'il soit aux purs aspects techniques du problème scolaire, reste singulièrement complexe et le qualitatif s'y mêle souvent, pour ne pas dire toujours, au quantitatif. Or, l'application stricte de la méthode expérimentale exige que l'investigateur connaisse tous les facteurs qui contribuent à la production d'un résultat et puisse les isoler afin d'en contrôler les effets. Une quantité de variables interviennent d'une expérience à l'autre, d'un groupe à l'autre et il est pratiquement impossible, malgré les techniques les plus ingénieuses, de dominer de façon satisfaisante ces variables. En un mot, il s'agit d'une action humaine sur des êtres humains et la nature même de ce rapport explique les difficultés intrinsèques de l'investigation pédagogique et l'impossibilité d'arriver à des conclusions absolues. Mais, sans vouloir assimiler purement et simplement la pédagogie expérimentale aux sciences quantitatives, il faut reconnaître qu'elle a réduit beaucoup la part du subjectif et de l'impressionnisme en matière d'enseignement, ramené à des proportions plus raisonnables l'importance de la vocation et de l'art empirique traditionnel." (10)

On peut se demander si les divergences de point de vue ne sont pas dues à la pédagogie expérimentale qui n'a pas su ou n'a pas eu les moyens d'obtenir des résultats assez probants pour justifier sa nécessité. Et pourtant la demande est impérative. Dans le rapport annuel 1970 du Conseil suisse de la science nous pouvons lire (p.56) :

"Durant l'année écoulée, nous avons relevé derechef, avec une inquiétude croissante, que le développement et la coordination de la recherche en matière d'éducation ne progressent que lentement, dans notre pays. Ces derniers mois, le danger de voir des jeunes chercheurs doués prendre le chemin de l'émigration est devenu aïgu..."

... les besoins en matière de recherche sont particulièrement grands, dans le domaine des sciences de l'éducation et de la pédagogie."

Tout ceci nous amène à préciser notre propre point de vue en ce qui concerne la recherche pédagogique. G. de Landsheere, dans son "Introduction à la recherche pédagogique" (11), en définit ainsi les objectifs :

- Objectif I : Connaître l'élève, comme enfant et comme learner.
- Objectif II : Connaître les éducateurs et l'enseignement.
- Objectif III : Connaître les matières à enseigner.
- Objectif IV : Connaître le système éducatif.
- Objectif V : Connaître les solutions apportées par d'autres.

Cette définition en terme de connaissance cerne parfaitement l'ensemble du problème. Cependant, elle nous paraît insuffisante en ce sens que le rôle de la recherche pédagogique ne peut se limiter à la connaissance des phénomènes en présence et de leur mode de relation dans le système éducatif, mais qu'elle doit, pour prendre toute sa valeur, déboucher sur une action, sur une modification du système, en d'autres termes, comme le dit Spaudling, sur l'élaboration d'un "produit".

Certes, la recherche fondamentale, au niveau universitaire, est indispensable car il ne peut y avoir d'action sans une connaissance approfondie des données sur lesquelles on cherche à agir. Mais la recherche pédagogique ne gagnera ses lettres de noblesse que si, au-delà des analyses aussi fouillées soient-elles, elle s'engage résolument dans l'action concrète visant la modification et l'amélioration de telle ou telle partie du système éducatif.

Une des raisons pour lesquelles la pédagogie expérimentale s'est peu développée semble provenir du fait que les principaux intéressés, les enseignants, se sont rarement sentis concernés. Les travaux conduits dans les écoles par les laboratoires de pédagogie des facultés ne sont souvent que tolérés. Les maîtres acceptent avec amabilité de "prêter" leurs élèves pour une expérience, mais l'intérêt des enseignants reste de surface parce que ceux-ci discernent mal l'utilité de telles expériences tandis que le chercheur, intéressé par le domaine particulier qui le préoccupe, néglige de prendre en considération le système global dans lequel il opère. De ce fait, même les résultats de recherches les plus dignes d'intérêt n'ont qu'un impact limité sur la réalité scolaire.

D'un autre côté, bon nombre d'enseignants tentent, dans le cadre de leur activité quotidienne, de se livrer à une recherche généralement de type empirique. Mais celle-ci ne peut que très difficilement déboucher sur des réalisations d'envergure parce que le maître, jouant à la fois le rôle d'acteur et d'observateur, n'a pas la possibilité de prendre suffisamment de recul et ne peut fonder son jugement que sur un ensemble de données auxquelles il attache une part d'affectivité évidente. En effet, l'aveu d'un échec ne pourrait que le culpabiliser à l'égard de ses propres élèves.

Si nous voulons que la recherche pédagogique réponde à notre attente et soit un élément vivifiant du système scolaire, il faut qu'un certain nombre de conditions soient réalisées.

En premier lieu, la recherche répondra à un besoin évident. Le corps enseignant, les autorités scolaires doivent avoir pris conscience qu'un problème se pose et que des solutions doivent lui être trouvées. La recherche n'est pas gratuite. Elle délimitera le problème, en cherchera les causes, proposera les remèdes, fixera le champ d'expérience et aboutira à des recommandations.

En second lieu, pour acquérir toute sa validité, la recherche doit être conduite dans les conditions réelles et habituelles imposées par le système scolaire. Il peut être utile, pour des objectifs précis, de disposer par exemple d'une école expérimentale, mais on n'aura garde d'oublier que les résultats observés et les succès éventuels enregistrés ne sont valables que pour cette école et que, sur la base des observations effectuées, il est absolument indispensable de reprendre l'expérience, dans un milieu scolaire non sélectionné, sur une large échelle, afin de pouvoir tenir compte de tous les facteurs agissant sur le système, le plus important étant sans contredit le mode de relations qui s'établit entre un maître et ses élèves.

En troisième lieu, la recherche ne peut en aucun cas être isolée du contexte général dans lequel elle s'exerce. A quoi bon élaborer une méthode d'enseignement d'une branche, excellente en soi, mais qui serait en contradiction flagrante avec les normes usuelles dans d'autres disciplines. Toute recherche s'inscrit dans un système global dont il faut absolument tenir compte.

En quatrième lieu, la recherche exige une approche interdisciplinaire. Le chercheur en pédagogie ne peut travailler de manière isolée. Il lui faut s'entourer du spécialiste du domaine concerné par la recherche, du psychologue, du sociologue, du praticien. En particulier, il est nécessaire de constituer de véritables équipes de travail, dans lesquelles les enseignants qui participent à l'expérience soient largement représentés, afin que les idées théoriques puissent être constamment confrontées aux réalités de la pratique quotidienne.

Enfin l'évaluation de l'expérience doit être rigoureusement conduite par un organisme neutre, qui ne se sente pas engagé par la réforme entreprise et qui n'élabore pas, car c'est un des risques du métier, des instruments de contrôle biaisés en fonction des résultats souhaités.

1.3 Objectif de la recherche

Le décor étant ainsi planté, il convient de définir l'objet de notre recherche et de décrire les circonstances dans lesquelles elle s'est développée.

En 1965, alors que les mathématiques modernes, dans notre région tout au moins, n'apparaissaient que timidement dans l'enseignement gymnasial et ne paraissaient pas devoir influencer l'école élémentaire, la direction de l'école professionnelle pour l'industrie et l'artisanat (EPIA) demandait l'ouverture d'une enquête qui devait permettre de déterminer les lacunes des jeunes apprentis dans le domaine de l'arithmétique afin que des cours de rattrapage puissent être organisés à l'intention des élèves en difficulté dans cette discipline.

Afin de répondre à cette demande, un sondage fut entrepris. Avec l'accord du département de l'instruction publique, il fut possible d'atteindre, en octobre 1966, non seulement les jeunes gens et jeunes filles récemment entrés en apprentissage mais l'ensemble des élèves du dixième degré, c'est-à-dire tous les élèves fréquentant la première année de scolarité post-obligatoire.

Les faibles résultats obtenus nous incitèrent, non pas à diriger notre étude vers l'organisation d'un rattrapage destiné à combler certaines lacunes, mais à envisager un traitement préventif. Pour ce faire, il s'agissait de connaître mieux la manière dont les élèves avaient assimilé l'enseignement de l'arithmétique au cours de la scolarité primaire. Dans ce but, l'élaboration et l'administration d'une batterie d'épreuves d'arithmétique destinée aux degrés 3 à 6 de la scolarité primaire devaient nous donner la possibilité de déceler les causes d'échecs, les paliers difficiles, les insuffisances éventuelles de l'enseignement et nous engager dans un effort d'amélioration de l'enseignement existant. Cette seconde enquête se déroula dans l'année scolaire 1968 - 1969.

Parallèlement, dès 1966, un petit groupe d'institutrices s'intéressaient aux essais à l'introduction à l'école élémentaire d'un enseignement basé sur les mathématiques modernes, essais tentés à Paris par Mme N. Picard.

En 1968, nous fûmes amenés à nous intéresser de très près à cette tentative qui paraissait pleine de promesses.

Dès lors le troisième volet de la recherche était tout tracé. Il s'agissait de définir expérimentalement les grandes lignes d'un enseignement nouveau qui remédierait aux insuffisances de l'enseignement traditionnel, de créer, avec la collaboration du corps enseignant, les instruments de cet enseignement, d'en évaluer les effets et de mettre en place, toujours dans une perspective expérimentale un dispositif propre à faciliter l'information et la formation du corps enseignant en exercice.

Ainsi les trois étapes de notre étude, de dimensions très inégales, étaient tracées :

- a. Mise en évidence du problème. Les élèves qui poursuivent des études à plein temps, pas plus que ceux qui se destinent aux métiers manuels, n'ont assimilé de manière satisfaisante les notions d'arithmétique enseignées à l'école primaire.
- b. Tentative d'explication. Essai d'analyse des causes générales d'échec. Sensibilisation du corps enseignant au besoin d'un changement.
- c. Elaboration expérimentale d'une méthodologie nouvelle et étude des moyens permettant de la rendre opérationnelle.

2. UNE SOCIÉTÉ "MATHÉMATISÉE"

2.1 L'évolution des mathématiques

L'expression "mathématiques modernes" est source de bien des confusions. En réalité, il ne s'agit pas d'opposer des mathématiques anciennes devenues caduques à une mathématique révolutionnaire qui viendrait les remplacer. Depuis qu'elle existe en tant que science la mathématique n'a cessé d'évoluer. A plusieurs reprises, au cours de l'histoire, l'évolution a conduit à de véritables mutations qui ont profondément modifié cette science. Le courant désigné sous le nom de "mathématiques modernes" date en réalité de plus d'un siècle. Il recouvre une tentative de restructuration des concepts mathématiques basée sur l'axiomatisation et la formalisation.

L'axiomatisation permet de dégager des structures mathématiques très générales qui, s'appuyant sur la théorie des ensembles, offrent un schéma assez large pour regrouper tous les aspects des mathématiques classiques.

Il serait donc faux de considérer que la caractéristique essentielle de cette mathématique est liée à la notion d'ensembles. La théorie des ensembles fournit un langage formalisé apte à décrire le phénomène principal que représente la découverte des trois structures-mères : les structures algébriques, d'ordre et topologiques.

Aujourd'hui, cet édifice mathématique est unanimement considéré comme un pas important dans l'histoire de la science. Il ne peut être regardé comme une mode passagère et son enseignement se trouve pleinement justifié.

Etpourtant, il s'avère que, contrairement à ce qui se passe pour d'autres disciplines scientifiques, l'enseignement des mathématiques n'a guère suivi le développement de cette science. Citons à ce propos A. Revuz :

"Mais ce développement, l'enseignement le suit avec un retard considérable. On peut mesurer le décalage entre le moment où une théorie est créée, et le moment où elle est officiellement enseignée en constatant qu'en 1950, en France, les élèves de l'école primaire n'en savaient sans doute pas plus que les mages babyloniens, un bachelier de mathématiques pas plus qu'Archimède,

un taupin n'en savait pas plus en analyse que Newton et Leibnitz, un licencié de mathématiques moins que Weierstrass, et s'il ne connaissait pas toutes les mathématiques antérieures à 1850, il ignorait la quasi-totalité des mathématiques postérieures à 1850." (12)

Si les connaissances des bacheliers et des licenciés sortent du cadre de notre propos, encore qu'elles se préparent certainement dès l'entrée à l'école primaire, il paraît évident que les notions mathématiques connues des mages babyloniens pouvaient peut-être suffire à un travailleur manuel de la fin du XIX siècle mais qu'elles sont notoirement insuffisantes aujourd'hui ; or, dans la plupart des cas, les programmes de mathématiques de la scolarité obligatoire n'ont pratiquement pas varié durant les 70 dernières années.

A titre d'exemple, nous pouvons citer le manuel actuellement encore en vigueur dans les classes de sixième année primaire genevoise. L'édition utilisée, bien qu'elle ait été très légèrement actualisée en 1955, date de 1940, soit de plus de trente ans. On y lit :

"Le présent manuel remplace les "Exercices et problèmes d'arithmétique" de A. Corbaz (1921).

... Ce manuel est la suite logique du manuel de la division moyenne (1933) et, comme lui, il s'inspire de la Méthodologie de L. Groscurin (1922)." (13)

Il ne s'agit pas ici de critiquer les autorités scolaires et de les taxer d'un immobilisme qui est démenti par de nombreuses réalisations dans d'autres disciplines mais plutôt de constater que, à Genève comme ailleurs, le besoin de modifier l'enseignement de l'arithmétique ne s'est pas fait sentir.

Il aura fallu attendre des phénomènes extérieurs à l'école pour que cet enseignement soit remis en question. Ce qui ne manque pas, aujourd'hui encore, de susciter d'ardentes polémiques. Longtemps, l'arithmétique a été considéré comme un art mineur. On en trouve un reflet dans l'ordonnance même des plans d'études et des bulletins de notes scolaires.

Le plan d'études français (14) présente successivement :

- Morale et initiation à la vie civique.
- Lecture.
- Ecriture.
- Langue française.
- Histoire.
- Géographie.
- Calcul, arithmétique et géométrie.
- Leçons de choses et sciences appliquées.
- Travail manuel et travaux pratiques.
- Dessin.
- Enseignement musical.
- Activités dirigées.
- Education physique.

C'est ordre n'est certainement pas le fait du hasard et constitue en réalité une hiérarchie où le secteur mathématique n'occupe que le septième rang.

Le plan d'études primaires genevois de 1966, comme celui de 1954 place l'arithmétique et la géométrie immédiatement après les différentes branches de la langue française.

En revanche, - doit-on y voir un signe des temps -, M. Debesse et G. Mialaret, dans leur "Traité des sciences pédagogiques" (15), au chapitre consacré à la pédagogie de l'époque contemporaine, donne la première place, avant la langue nationale, à la langue mathématique.

Ainsi est mise en évidence l'une des caractéristiques de la mathématique contemporaine. Indépendamment d'un contenu sur lequel, au niveau de l'enseignement secondaire surtout, on peut encore émettre des opinions divergentes, la mathématique s'affirme aujourd'hui principalement comme un langage, comme un moyen de communication, ce qui élargit considérablement son champ d'action et justifie amplement la nécessité impérieuse d'une révision complète des objectifs assignés à son enseignement.

2.2 Mathématique et société

La mathématique, nous venons de le voir, change de caractère et devient, dans la civilisation contemporaine, un moyen de communication de la masse au même titre que la langue maternelle. Il suffit d'ouvrir son journal quotidien pour voir apparaître un grand nombre d'informations présentées avec l'aide de nombres et de graphiques.

Mais il y a plus. La modification des conditions de travail, les découvertes scientifiques, l'essor de la technologie, exigent non seulement une formation mathématique poussée des cadres mais aussi des connaissances et des pouvoirs nouveaux de la totalité de la population.

Le professeur lausannois P. Jaccard écrivait, il y a peu de temps :

"En France et en Italie, on a prévu, il y a quelques années, que la proportion des emplois ne demandant pas de formation particulière, s'abaisserait dans un avenir pas très éloigné, de 60 à 20 % du total des postes occupés. En revanche, la proportion des emplois qualifiés s'élèverait de 27 à 48 % et celle des postes de cadres moyens et supérieurs de 13 à 32 %. En Suisse, déjà, en dépit de notre réputation d'être un "peuple de cadres", la pénurie se généralise dans les professions dirigeantes : 20 % de l'ensemble des professeurs universitaires, médecins, chefs d'entreprises, ingénieurs et chimistes sont des étrangers. Aussi le Conseil suisse de la science a-t-il demandé qu'on double le nombre annuel des diplômés universitaires, s'élevant actuellement à 3000 seulement." (16)

A notre sens, la réponse à ce besoin ne peut être fournie ni par la démocratisation des études qui agit sur des facteurs économiques mais non sur les facteurs socio-culturels, ni par un soin particulier voué au dépistage précoce des sujets les mieux doués. C'est la masse scolaire qui doit recevoir un enseignement mieux adapté à ses possibilités intellectuelles et aux conditions de vie dans lesquelles elle évolue. L'élévation générale des aptitudes et des connaissances de la population toute entière permettra alors à un plus grand nombre d'atteindre le niveau universitaire.

Nul ne peut nier que l'une des caractéristiques de notre civilisation actuelle est bien la part de plus en plus grande que prennent les ma-

thématiques dans tous les secteurs professionnels. Même dans les professions de type littéraire, l'usage des mathématiques se développe avec une rapidité stupéfiante.

Mais on n'a peut-être pas pris garde que le même phénomène touche la vie quotidienne. Il suffit d'ouvrir un journal, d'examiner un plan, d'étudier la "théorie" d'un tricot, de remplir sa feuille d'impôt, de préparer un itinéraire, de planifier son budget, d'effectuer des rangements, et bien d'autres choses encore, pour que les problèmes mathématiques surgissent en nombre.

Or, ainsi que le déclare B. Schwartz :

"Pour l'individu, il est également impératif d'assurer sa survie professionnelle dans ce monde mobile et de lui permettre finalement d'assurer ses changements et de les choisir, mais aussi de comprendre les événements de sa vie privée, familiale, sociale, de "se tenir au courant" et d'être à même de participer activement à la vie de son groupe social, d'y prendre des responsabilités, d'épanouir sa personnalité.

... On prend pourtant conscience de plus en plus d'une distorsion entre l'éducation qui est sensée préparer à la vie et cette vie même, entre ce que dispense l'institution éducative, qui consiste essentiellement en apprentissages intellectuels, et la réalité multiple et en partie anarchique dans laquelle l'enseigné - enfant comme adulte - est appelé à jouer divers rôles dès qu'il passe l'enceinte de l'école. Ce sont ces rôles : consommateur d'informations, de services, d'objets, travailleur, syndicaliste, ménagère, père de famille, ... que l'institution éducative doit prendre en compte si elle prétend toujours préparer à la vie les personnes qu'elle a en charge." (17)

L'auteur parle ici de l'ensemble de l'éducation mais ses paroles peuvent s'appliquer avec beaucoup de pertinence au domaine mathématique.

L'enseignement traditionnel de l'arithmétique, si nous nous limitons à la scolarité obligatoire, convenait peut-être à la société que nous avons connue jusque vers 1950. En liaison avec l'évolution de la technique,

se pose le problème de l'adaptation de l'homme à son environnement. Nos prédécesseurs l'avaient bien compris lorsqu'ils introduisirent, par paliers successifs, les notions arithmétiques répondant aux exigences du moment. Mais, à ce moment là, l'honnête homme avait la possibilité de prendre en considération l'ensemble des problèmes de son temps et pouvait sans grand risque d'erreur, supputer les besoins en mathématique que rencontreraient les élèves au moment de leur passage dans le monde professionnel.

La vie en milieu économique fermé, de caractère rural la plupart du temps, l'agriculture, l'artisanat et le petit commerce, demandaient que chaque individu possédât un certain nombre de connaissances pratiques indispensables dans la vie quotidienne.

La révolution industrielle fit naître des besoins nouveaux qui s'ajoutèrent aux données premières. Mais les adjonctions successives furent généralement présentées comme des chapitres supplémentaires, sans que l'ensemble du programme soit reconsidéré. On trouve probablement ici la cause de la dispersion de notions mathématiques de base dans une série d'applications particulières sans lien entre elles. Prenons, à titre d'exemple, la fonction linéaire qui recouvre plus de la moitié des problèmes infligés aux élèves des degrés primaires. Nous la trouvons successivement dans les questions de prix d'achat et de prix de vente puis de calcul d'un prix de revient, dans les problèmes de déplacement et de vitesse, les pourcentages, les rapports, les intérêts, le poids volumique, mais, à notre connaissance, bien rares sont les manuels qui établissent un lien véritable entre ces différents aspects d'une même loi.

Cette manière de faire, très onéreuse en temps, n'est plus possible. D'une part, le nombre et l'étendue des connaissances indispensables croît régulièrement alors que le temps consacré à l'enseignement des mathématiques n'est guère extensible. Les écoliers ne sont-ils pas les seuls travailleurs dont l'horaire ne soit pas en voie de diminution. D'autre part, l'école ne peut plus se contenter de donner une formation mathématique à une minorité d'élèves doués tandis qu'elle limite ses ambitions à la connaissance des quatre opérations - dont l'une au moins, la division, ne servira plus guère - et de quelques procédés de calcul pour la majorité des écoliers.

Enfin, et c'est là le plus important, l'arithmétique, qui représentait l'essentiel jusqu'ici, ne constitue plus qu'une faible partie de l'ensemble des connaissances et des aptitudes dont l'homme doit être muni de nos jours.

Actuellement, les notions d'arithmétique et d'algèbre données aux jeunes gens et jeunes filles qui entrent en apprentissage ou à ceux et celles qui poursuivent des études longues sont, au terme de la scolarité obligatoire, insuffisantes. Plus encore, un certain nombre de ces notions, auxquelles ils ont consacré beaucoup de temps et d'efforts, leur seront totalement inutiles.

Songeons un instant, à titre d'exemple, à quelques-uns des métiers auxquels on accède par un apprentissage. L'apprenti comptable devait posséder une écriture claire et savoir additionner de longues séries de nombres sans erreur ; les machines comptables ont rendu ces qualités inutiles. La vendeuse, qui devait savoir peser et calculer, doit aujourd'hui être apte à décoder l'information fournie par une balance automatique et posséder une méthode de classement qui lui permette d'absorber l'accroissement phénoménal de la variété des produits qu'elle doit vendre. Le charron, qui pouvait se fier essentiellement à la justesse de son coup d'oeil et à la sûreté de sa main, est remplacé par le mécanicien utilisant machines-outils et instruments de mesure. L'apprentie coiffeuse effectue de délicats dosages de produits chimiques. L'agriculteur enfin est devenu technicien, économiste, chimiste, mécanicien.

La mathématique, en tant que langage formalisé, est devenue un mode d'expression nécessaire de la pensée. Elle est présente dans toutes les activités humaines au même titre que la langue maternelle. L'homme aura toujours besoin d'un certain nombre de connaissances arithmétiques, mais il lui faut, quel que soit le niveau intellectuel exigé par la tâche à laquelle il s'astreint, toute une série d'autres aptitudes mathématiques : aptitude à classer, à trier, à sélectionner, codage et décodage d'informations données sous formes diverses, interprétation de signaux, estimation de vitesses et de distances, organisation logique de données concrètes ou abstraites, représentation dans un espace à deux ou trois dimensions, aptitude à une réaction rapide à partir d'un faisceau d'informations apparaissant simultanément sous une forme codée, mise en relation de données concrètes ou d'objets abstraits.

Cette liste non exhaustive recouvre en fait partiellement un grand nombre d'activités qui figurent, sous une forme inconsciente et diffuse, dans la pratique scolaire. Cependant, une formation plus poussée exige une prise de conscience et une organisation rationnelle de ces éléments.

Si l'école élémentaire s'en tenait encore longtemps à l'enseignement actuel de l'arithmétique, il est probable que le développement économique du pays en ressentirait des conséquences fâcheuses. Il est probable aussi que le nombre des personnes incapables de s'adapter à l'évolution technique de plus en plus rapide et aux changements d'activité qu'elle provoque en cours de carrière croîtrait de façon inquiétante. Il est probable enfin que l'on assisterait à un hiatus de plus en plus profond entre l'école et les exigences de la vie quotidienne.

L'école se doit de former des esprits capables de poser clairement les problèmes, de faire l'inventaire des solutions possibles, d'en juger la validité et d'agir en connaissance de cause. Elle ne peut se contenter de doter les élèves d'un certain nombre de savoirs, même si ceux-ci paraissent des valeurs sûres. L'un des buts les plus importants de sa mission consiste à préparer les jeunes à la remise en question de ces connaissances et à les rendre capables d'en acquérir de nouvelles pendant toute leur vie.

Enfin il convient de revenir et d'insister sur le fait que les mesures à prendre concernent toute la population scolaire, du moins doué au plus intelligent, de l'enfant d'un manoeuvre à celui d'un mathématicien. La prolongation générale du temps de scolarité n'a eu que peu d'influence sur l'organisation scolaire. L'école continue à être basée sur un processus essentiellement sélectif qui empêche les élèves peu doués, ou ceux qui vivent dans un milieu socio-culturel défavorisé, d'atteindre le développement intellectuel auquel leurs potentialités virtuelles leur permettrait de prétendre. On ne nous contredira pas si nous affirmons que les enseignants, et surtout les instituteurs, admettent tout naturellement et sans toujours en avoir une conscience nette, que la famille a le devoir de faire apprendre à l'enfant sa table d'addition ou de multiplication et de l'aider à résoudre les problèmes donnés pour devoir. On n'insistera jamais assez sur le préjudice ainsi causé aux enfants dont les parents n'ont pas la possibilité matérielle ou pas la capacité intellectuelle de jouer le rôle attendu par l'école.

Il y a là, sur un plan général, une perte de potentiel intellectuel indéniable. Les mesures financières favorisant la démocratisation des études interviennent à un moment où, dans la plupart des cas, les choses sont jouées depuis longtemps. S'il est juste, socialement parlant, de donner à tous les élèves la possibilité matérielle de poursuivre des études au-delà de la scolarité obligatoire, il est encore plus important de donner aux enfants socialement défavorisés dès leur entrée à l'école, les moyens et le temps de compenser leur handicap sans que celui-ci apparaisse comme un échec par comparaison avec d'autres enfants. Dans cette perspective, l'apprentissage mnémotech-

nique précoce de tables ou d'algorithmes constitue une faute majeure qui doit absolument disparaître de la pratique scolaire pour être remplacée par une procédure beaucoup plus souple donnant à chaque individu le moyen de se développer à son rythme propre.

Les considérations ci-dessus visaient la mise en évidence, au-delà de la querelle stérile qui semble s'instaurer entre partisans et adversaires de ce qu'on appelle les mathématiques modernes, de la nécessité impérieuse d'un important changement de l'enseignement de ce que nous appellerons désormais pour montrer, en accord avec les mathématiques d'aujourd'hui, son caractère unitairement structuré, la mathématique.

Mais une réforme, aussi bien faite soit-elle, qui se limiterait à une amélioration de l'enseignement profitable à une élite seulement, serait à notre avis vaine, voire même dangereuse. Il est indispensable que tous les élèves en bénéficient et que, au moins durant la scolarité obligatoire, on passe d'une pédagogie de l'échec à une pédagogie du succès. Tout nous montre que l'acte d'apprendre, jusqu'ici limité au temps de l'enfance et de l'adolescence, s'étendra désormais jusqu'à la fin de la vie. Si l'on veut donner à la jeunesse le goût et la volonté de continuer à apprendre après les années scolaires, il ne faut pas que l'école lui laisse, comme c'est encore trop souvent le cas aujourd'hui, un sentiment d'échec et de frustration qui lui fait rejeter l'effort intellectuel comme un fardeau trop pesant sitôt remplies les obligations scolaires.

3. ROLE DE LA MATHEMATIQUE DANS LE DEVELOPPEMENT DE L'ENFANT

Il nous reste à discuter, dans cette première partie, du rôle assigné à la mathématique dans la formation de l'enfant.

Il est intéressant de comparer les buts assignés à cet enseignement dans les textes de différents cantons ou pays tels qu'ils ressortent de l'enquête conduite en 1950 par le bureau international d'éducation (BIE). Bien que cette étude date d'une vingtaine d'années, elle conserve une actualité certaine dans la plupart des cas.

"SUISSE" : (18)

Bâle-Ville

Les notions mathématiques acquises à l'école primaire doivent permettre à l'enfant de saisir l'aspect quantitatif de son milieu. Il doit aussi acquérir une certaine sûreté dans le maniement des nombres.

Genève

Le but essentiel des leçons d'arithmétique est le développement de l'aptitude à compter, ce qui exige la formation d'automatismes rapides et sûrs. Par l'étude de la géométrie élémentaire, les élèves doivent apprendre non seulement à calculer des longueurs, des surfaces ou des volumes mais aussi à estimer, à comparer et à mesurer.

Neuchâtel

L'arithmétique et le calcul mental ont pour but de former certains mécanismes tout en cultivant le raisonnement.

Vaud

L'étude de l'arithmétique et de la géométrie doit permettre aux élèves d'apprendre à calculer et à résoudre les problèmes simples de la vie courante tout en fortifiant leur attention, leur jugement, leur raisonnement et en acquérant des habitudes d'ordre et de précision.

Zurich

Les instructions officielles précisent que le programme de calcul est destiné à permettre à l'enfant de former des concepts numériques, d'acquérir les mécanismes fondamentaux du calcul, de développer sa pensée logique, et d'appliquer ses connaissances à la résolution des problèmes posés par la vie courante."

On constate que Bâle et Genève mentionnent exclusivement l'apprentissage numérique. Neuchâtel fait une allusion au raisonnement tandis que Vaud et Zurich semblent attacher une plus grande importance au jugement et à la pensée logique.

Les informations fournies par quelques pays permettront de mieux cerner le problème :

" Belgique (19)

... éveil de la pensée calculatrice à l'école maternelle et au premier degré de l'école primaire, acquisition d'automatismes et de techniques, acquisition de connaissances et, dominant le tout, formation intellectuelle.

France (20)

... Au début de la scolarité, il convient avant tout d'acquérir le mécanisme du calcul, d'apprendre à calculer vite et bien, sans pour autant négliger le côté éducatif de l'enseignement mathématique.

Mais la théorie n'intervient que dans la mesure où elle est nécessaire pour justifier la pratique du calcul, la rendre plus agréable à l'enfant qui cherche à s'expliquer ce qu'il fait, la rendre plus féconde en la rendant plus intelligible.

Aux cours moyen et supérieur, l'outil est acquis, les préoccupations essentielles du maître peuvent alors librement s'orienter vers l'initiation au raisonnement mathématique, dans les formes élémentaires, en rapport avec l'âge des élèves.

Hongrie (21)

L'initiation mathématique donnée à l'école primaire a pour but de rendre les enfants capables de calculer vite et bien, de leur permettre de comprendre les relations mathématiques fondamentales et de les appliquer, le cas échéant, dans la vie pratique. Cet enseignement est aussi considéré comme un moyen de développer les facultés de raisonnement, de jugement et d'abstraction."

Ces trois exemples donnent un bon reflet des buts fixés à l'initiation mathématique dans la plupart des pays. La primauté est donnée à l'acquisition des mécanismes. Au second plan, on discerne la volonté de développer les facultés de raisonnement.

Une voix légèrement divergente, cependant, provient de l'Irlande (22):

"Pour bien réussir dans l'enseignement de cette discipline, il est nécessaire de se représenter clairement le but poursuivi. Tout le monde a besoin de quelques connaissances arithmétiques dans les affaires de la vie, mais un peu de réflexion montre que ces connaissances sont minimales, et que les acquérir ne peut être le but principal de l'enseignement de l'arithmétique dans les écoles. On dépasse les connaissances indispensables en raison de la valeur formative de cette discipline qui est une culture de la pensée conséquente, rigoureuse et logique, et aussi des applications qu'on peut en faire dans la vie sociale des écoliers."

Au cours de la Conférence qui suivit l'enquête, la tendance visant à donner à la mathématique un rôle beaucoup plus important que l'acquisition de simples mécanismes se dessina d'une manière très nette. En particulier, l'intervention du professeur J. Piaget (23) nous paraît significative :

"Il existe une corrélation étroite entre l'aptitude aux mathématiques et l'intelligence générale. Il y a donc là un problème troublant : comment expliquer que tant de sujets doués d'une intelligence normale échouent en mathématiques ? Les résultats de ces recherches psychologiques peuvent se résumer en trois points essentiels :

- 1) L'opération mathématique dérive de l'action. Il en résulte que la présentation intuitive ne suffit pas, il faut que l'enfant opère par lui-même, l'opération manuelle devant préparer l'opération mentale. Il faut cependant faire une distinction, car il ne s'agit pas de n'importe quelle action. L'enfant doit partir d'actions très simples, comme celles d'ordonner, de superposer, de réunir, de dissocier des objets, de les mettre en correspondance, etc., mais d'actions situées dans un contexte général d'intérêt. L'action suppose une expérimentation de la part de l'enfant, opérée avec un certain matériel, qu'il traduira ensuite

par des opérations mathématiques ; il doit pouvoir faire des expériences sur ses propres actions, en les coordonnant entre elles. Ce genre d'actions, indispensable au point de départ, reste nécessaire à toutes les étapes de l'enseignement primaire.

... Une propédeutique de l'algèbre, par exemple, serait une préparation des mécanismes opératoires pouvant ensuite être traduits sous forme algébriques. Il est en effet certain que quelques opérations algébriques paraissant difficiles à des adolescents (sous leur forme algébrique symbolique) sont compréhensibles logiquement à des enfants de 8 ans (par exemple, moins par moins donne plus).

2) Dans tous les domaines de la mathématique, le qualitatif doit précéder le numérique (interviennent, par exemple, des opérations logiques dans la construction de la conception des nombres cardinaux et ordinaux). Dans le domaine algébrique, il en va de même. On pourrait gagner beaucoup de temps à l'école primaire en commençant par des problèmes logiques, non numériques.

3) Il existe un parallélisme évident entre la construction des notions arithmétiques et celle des notions géométriques élémentaires. Ces deux sortes d'opérations se forment en interaction étroite chez l'enfant. Par exemple : nombre et mesure, proportions, etc...

... Il faut donc considérer de près les faits psychologiques et il faut souhaiter une collaboration étroite entre les éducateurs et les chercheurs dans le domaine de la psycho-génétique."

Il apparaît très nettement que les activités mathématiques nouvelles demandées par l'éminent psychologue genevois sont indépendantes de l'essor des mathématiques modernes à l'école primaire. L'introduction, dès le début de la scolarité, des notions d'ensembles et de relations constitue seulement l'une des réponses possibles aux recommandations votées à la fin de la conférence. Celles-ci apparaissent en effet comme l'élément précurseur de toutes les réformes de l'enseignement mathématique entreprises durant les vingt dernières années.

Recommandation No 31
aux ministères de l'instruction publique
concernant
l'initiation mathématique à l'école primaire
(Jusqu'à l'âge de 11 à 12 ans)

"La conférence internationale de l'instruction publique, Convoquée à Genève par l'Organisation des Nations Unies pour l'Education, la Science et la Culture et par le Bureau international d'Education, et s'y étant réunie le six juillet mil neuf cent cinquante, adopte la recommandation suivante :

La Conférence,

Considérant, d'une part, que l'initiation mathématique constitue l'un des aspects essentiels et universels de la formation de l'esprit d'objectivité et de rigueur,

Que, d'autre part, l'activité spontanée et la libre vérification réclamées particulièrement par l'initiation mathématique comportent une valeur formative intellectuelle et morale dont devraient s'inspirer les autres disciplines,

Considérant enfin que l'enseignement des mathématiques, l'un des plus difficiles, peut actuellement utiliser les résultats de nombreuses recherches psychologiques et pédagogiques propres à le faciliter,

Soumet aux Ministères de l'instruction publique des différents pays les recommandations suivantes :

1. Que l'initiation mathématique soit adaptée, étape par étape, aux opérations intellectuelles caractéristiques des différents stades du développement de l'enfant et utilise en retour toutes les ressources que ces opérations comportent ;
2. Que déjà l'école maternelle fournisse à l'enfant l'occasion de découvrir, grâce à un ensemble d'actions effectives et personnelles, les relations élémentaires (inclusion, ordre, correspondance, etc.) constitutives du nombre et de l'espace ;

3. Que l'initiation aux opérations arithmétiques, durant les premières années primaires, soit toujours fondée sur des actions pré-alables, permettant à l'enfant de redécouvrir pour son compte le mécanisme de ces opérations par la manipulation d'objets concrets et en fonction de questions qu'il aura été conduit à se poser selon ses intérêts spontanés ;
4. Que parallèlement à cette construction des rapports numériques, soit organisée une série graduée d'activités portant sur les formes, les relations et les mesures spatiales élémentaires, de manière à assurer la correspondance entre les opérations arithmétiques et les opérations géométriques ;
5. Que, en connexion avec cette initiation aux opérations par l'action, un soin particulier soit porté à l'élaboration des relations qualitatives et logiques : tout problème comportant nécessairement une structure logique et des données numériques, il importe qu'avant l'introduction de ces dernières on obtienne une compréhension aussi complète que possible de cette structure qualitative ;
6. Que, dans la suite, les problèmes portant sur des notions nouvelles (telles que le temps, la vitesse, etc.) ne soient respectivement abordés qu'après de nouveaux exercices comportant chaque fois les mêmes activités concrètes ainsi que le même effort de structuration logique ;
7. Que le recours à l'activité de l'enfant et à ses capacités d'invention s'accompagne d'un appel croissant à la vérification, de manière que l'acquisition de chaque nouveau système d'opérations ou de relations marque un progrès dans la rigueur des raisonnements ;
8. Qu'une attention particulière soit accordée à l'expression verbale des opérations et à l'emploi d'un vocabulaire correct, correspondant à chaque niveau considéré ;
9. Que des exercices destinés à assurer l'acquisition des mécanismes du calcul, notamment du calcul oral, interviennent seulement après que l'enfant aura compris le sens des opérations en jeu et la nécessité de cette mécanisation ;
10. Que les méthodes de travail par équipes soient utilisées, notamment pour renforcer l'intérêt des élèves et pour développer leurs capacités de contrôle mutuel ;
11. Que les maîtres cherchent systématiquement, à l'aide de procédés psychologiques variés, à dépister les points faibles de leurs élè-

ves, à déceler les causes de ces insuffisances et à y remédier par des moyens adaptés à chaque cas individuel;

12. Que l'enseignement mathématique soit le plus possible coordonné aux autres enseignements, que les exercices et problèmes proposés aux élèves soient vraisemblables, tirés de la vie pratique et autant que possible en rapport avec le milieu dans lequel vit l'enfant;
13. Que les établissements chargés de la formation des maîtres soient invités à s'inspirer des principes ci-dessus définis afin de préparer les instituteurs à les mettre en pratique.

Dix ans plus tard, Robert Dottrens, qui, lui non plus, ne se réfère pas aux mathématiques modernes, écrit :

"Enfin calculer! Connaître les quatre opérations fondamentales, la table d'addition, "le livret" ; résoudre des problèmes simples tirés des manuels qui en limitent les énoncés à l'exercice de raisonnements élémentaires et à la résolution d'opérations simples par l'acquisition d'automatisme.

Il existe encore, sans doute, des manuels d'arithmétique dans lesquels les problèmes sont classés par types (achat, vente, bénéfiques; vente, achat, perte; achat, bénéfice, prix de vente; etc..). L'enfant n'est pas entraîné à raisonner véritablement, mais à dépister à quel type appartient le problème posé : si le dépistage est bien fait, le mécanisme fonctionne utilement.

La psychologie contemporaine a fait le procès des dangers que présente un tel formalisme et l'on ferait bien de se persuader, à l'heure où la formation de techniciens, ingénieurs, chercheurs est au premier plan des soucis des gouvernements, que c'est à l'âge préscolaire, dans les jardins d'enfants et les écoles maternelles, puis à l'école primaire élémentaire que doit débiter un enseignement des mathématiques par le moyen des méthodes opératoires qui font perdre à cet enseignement le caractère rebutant et énigmatique qu'il prend très tôt pour beaucoup.

Au lieu de décourager, elles permettent le passage progressif du concret à l'abstrait, de la réalité au symbole, et augmentent par là considérablement le nombre des adolescents capables de poursuivre des études spécialisées.

L'objectif de l'enseignement de l'arithmétique à l'école primaire consiste à développer chez l'élève les notions de nombre, de quantité, de rapports numériques, à lui faire acquérir la compréhension et la pratique des opérations fondamentales, à le rendre capable de raisonner sur des questions à sa portée, à contribuer à développer sa pensée logique et à le doter des automatismes de base, toutes acquisitions sans la pleine possession et la maîtrise desquelles il sera incapable de poursuivre des études de mathématiques au-delà du cycle primaire.

L'erreur commise jusqu'ici est d'avoir eu des programmes trop ambitieux, ne tenant pas compte du développement mental et des capacités de l'enfant. Le résultat est encore trop souvent de sacrifier un grand nombre d'élèves capables - à condition que l'enseignement soit à leur portée et arrive au moment où ils peuvent en profiter - aux rares esprits avancés considérés comme possédant des capacités normales.

La réforme du premier enseignement des mathématiques, si l'on veut augmenter le nombre de ceux qui pourront en poursuivre l'étude, consiste en un changement de nos conceptions des programmes et des méthodes.

Alléger les programmes pour que les notions fondamentales aient le temps d'être assimilées, revues, travaillées, définitivement acquises.

Changer les méthodes en introduisant largement l'expérience, l'expérimentation, les manipulations et en procédant avec circonspection au passage du concret à l'abstrait." (25)

De cette brève analyse, il ressort bien que la nécessité d'une transformation profonde de l'initiation à la mathématique est unanimement reconnue. Cette transformation est caractérisée en premier lieu par un renversement de l'ordre des valeurs. L'acquisition des mécanismes logico-mathématiques passe en second plan tandis que s'affirme la primauté du raisonnement

En second lieu la psychologie génétique met en évidence l'aspect qualitatif de la mathématique par opposition à son aspect quantitatif.

En troisième lieu, apparaît timidement l'aspect relationnel de la mathématique, son caractère de moyen de communication, de langage formalisé.

Le terrain était donc tout préparé pour les tenants d'une nouvelle conception de cet enseignement s'appuyant sur les mathématiques modernes. Mais il convient de ne pas négliger la vanité d'une réforme prenant pour objet le contenu seulement de l'enseignement. En fait, il s'agit autant d'une mutation d'ordre pédagogique et d'une nouvelle définition des objectifs assignés à l'étude de la mathématique que d'une réforme de contenu. C'est ce que nous allons tenter de démontrer à travers quelques textes plus récents.

Nous trouvons chez L. Jeronnez :

"Les instituteurs sont inquiets, aujourd'hui plus qu'hier, sur la valeur de leur enseignement, confrontés qu'ils sont avec le mouvement formidable de la mathématique moderne qui s'impose inéluctablement à tous les degrés de l'enseignement et dans la plupart des disciplines. Ils se demandent d'une part, si leur enseignement de l'arithmétique va se transformer complètement, d'autre part quelle est l'aide qu'une mathématique nouvelle peut leur apporter pour résoudre certains de leurs problèmes pédagogiques. Si l'on s'en réfère aux buts de l'enseignement primaire, il s'agit - de toute urgence - de transformer les plans d'études actuels qui mettent l'accent sur l'acquisition de techniques et n'insistent jamais sur le but de l'enseignement de la mathématique qui est essentiellement de former l'esprit et, plus particulièrement, l'esprit mathématique de l'enfant. Car ce que les parents attendent de l'Ecole primaire - ce que tout le monde attend, professeurs du secondaire ou de l'Université, employeurs de toutes espèces - c'est que l'instituteur et l'institutrice favorisent au maximum l'éclosion et l'épanouissement d'une jeune intelligence, qu'ils suscitent le goût (ou l'habitude) du travail, apportent une nourriture intellectuelle substantielle à des enfants qui ne doivent pas être sous-alimentés de crainte de voir leur "appétit" décroître rapidement. (26)

André Revuz écrit :

"... la révolution de la mathématique est en train d'entraîner une révolution de son enseignement qui a trop souvent réalisé

le triste paradoxe de remplacer par un dressage dogmatique l'initiation à une activité où l'intelligence humaine a montré au plus haut point sa souplesse et sa puissance." (27)

Sous la plume de M. Glaymann, nous trouvons :

"En définitive, les programmes actuels nous apparaissent tout à la fois trop ambitieux, trop prudents, et trop rigoureux.

Trop ambitieux parce qu'ils imposent prématurément l'acquisition de connaissances, de notions de concepts, d'opérations inaccessibles à la moyenne des élèves. Les maîtres et les élèves du C.P. s'épuisent à enseigner et à apprendre la soustraction avec retenue... Sommes-nous si pressés ?

Trop prudents, parce que nous sous-estimons les possibilités créatrices des enfants. Notre enseignement actuel retarde l'acquisition de concepts assimilables avant l'entrée en classe de 6e.

... Trop rigoureux enfin, parce que les notions très diverses, sont trop souvent enseignées sans lien, ou, dans les meilleurs des cas, avec les seuls liens que découvrent les maîtres, chemin faisant.. Quel élève de l'école primaire admettra qu'un carré est aussi un rectangle ? " (28)

Ce point de vue converge avec celui de M. Dumont qui déclare :

"Le souci d'enseigner des techniques considérées comme essentielles, fait oublier la formation de l'intelligence, mot fort vague englobant une foule d'activités mentales mal distinguées. Là est le drame de notre système ; c'est dans les premières années de l'école que cette formation devrait avoir le plus d'importance, développement d'aptitudes, aptitudes à classer, organiser dans l'espace, dans le temps, des objets. des activités, des souvenirs, aptitude à imaginer, à combiner, aptitude à coder, décoder, et, bref toute cette souplesse, cette agilité, cette ouverture qui sont la base de toute discipline. Or les desseins utilitaires l'emportent sur l'aspect éducatif et la majeure partie du temps scolaire est consacrée à l'acquisition de mécanismes ne demandant guère à l'élève d'autre ef-

fort personnel que celui d'imiter scrupuleusement. La docilité est quasi la seule aptitude réellement encouragée et récompensée à l'école, au lycée." (29)

Enfin, c'est à D. Joiris que nous demanderons de clore cette brève série de citations :

"Ainsi il s'agit, comme le prônait Dewey, de poser à l'enfant un problème très concret d'analyser ses réactions face à ce problème et de lui faire trouver ou de lui donner, s'il n'y parvient pas seul, les éléments de la réponse. L'enfant, par le problème posé, voit le but à atteindre. Pour le résoudre, il a devant lui les éléments de ce problème : il s'agit de les analyser, de dégager l'essentiel de l'accessoire. Il s'agit aussi de percevoir ce qui est commun à tous ces éléments et comment les articuler entre eux pour arriver à la solution. L'enfant développe, à la fois, ses capacités analytiques et synthétiques.

Le raisonnement, l'esprit de logique, est donc poussé à l'extrême. Il ne s'agit plus de donner un schéma de résolution de problèmes, mais d'apprendre à l'enfant à tirer profit de ce qui est donné, pour arriver à une solution.

Bien sûr, on développe aussi la mémoire, mais non plus gratuitement : on insiste surtout sur la compréhension des situations.

Pour cela, on agit sur des situations concrètes, avec beaucoup de manipulations. On travaille directement sur des "abstractions" et non plus sur des objets réels. On prépare ainsi la représentation abstraite très tôt." (30)

Lorsque nous examinons le rôle que joue, ou plutôt que devrait jouer l'enseignement de la mathématique à l'école primaire, nous pouvons définir trois objectifs généraux.

Tout d'abord, il s'agit d'une participation essentielle au développement du raisonnement. L'expression couramment utilisée de raisonnement logico-mathématique montre bien l'interdépendance étroite qui existe entre ces deux disciplines scientifiques : logique d'une part, mathématique d'autre part. Autrefois, la logique appartenait au cours

de philosophie et l'un des objectifs de l'enseignement du latin était d'apprendre à raisonner tandis que les mathématiques étaient considérées pour leur rôle utilitaire surtout. De nos jours, on peut presque dire que la logique est devenue l'un des éléments constitutifs de la mathématique tandis que la psychologie génétique a mis en évidence, de manière très nette, l'interdépendance existant entre la construction des structures logiques et celle des structures mathématiques au cours du développement de l'enfant.

Le deuxième objectif consiste en l'élaboration d'un langage, d'un moyen de communication. Dans la civilisation que nous connaissons, les informations, les signaux d'ordre mathématique sont extrêmement fréquents. Bien souvent, ils remplacent des informations lexicales qui, dans la même situation, seraient moins brèves et moins précises. L'enseignement doit donc contribuer à l'élaboration de ce langage qui deviendra, au cours des années, de plus en plus rigoureux.

Enfin le dernier objectif est l'acquisition d'un nombre limité de connaissances indispensables dans la vie quotidienne.

Dans la plupart des écoles élémentaires, l'enseignement se cantonne au troisième objectif seulement. De cas en cas, à propos d'une notion arithmétique de base, des exercices dits de développement ou de raisonnement sont présentés en complément mais on ne distingue que rarement, dans ces exercices, une progression rigoureusement conçue dans le sens du développement du raisonnement logico-mathématique.

De ce fait, seuls les élèves les plus doués parviennent à véritablement ordonner les notions étudiées en un univers bien structuré. En revanche, pour un très grand nombre d'enfants, l'assimilation des connaissances ne prend pas un caractère opératoire et ne permet que des activités de reproduction. Devant un problème nouveau, le sujet cherche dans sa mémoire s'il trouve un modèle préexistant mais il ne peut guère élaborer une stratégie neuve.

Nous nous trouvons ainsi en présence d'un certain nombre de faits qui accroissent de plus en plus, malgré les efforts et le dévouement du corps enseignant, le divorce entre les acquisitions scolaires et les aptitudes exigées par la vie d'une part, les exigences des programmes et notre connaissance du développement génétique de l'enfant d'autre part.

A notre sens, tant qu'une réforme très profonde n'aura pas été entreprise, les efforts quotidiens des maîtres continueront à être fort mal récompensés. La modification devra intervenir sur le double plan des contenus et des méthodes afin que les élèves reçoivent un enseignement adapté à la fois à leur rythme de développement et aux besoins du système.

La recherche pédagogique s'appuie inévitablement sur une définition des finalités de l'enseignement qui tient à une philosophie de l'éducation. Pour nous, l'enseignement de la mathématique à l'école primaire aura pour but :

- Le développement du raisonnement logico-mathématique.
- La construction d'un mode d'appréhension et d'organisation du réel.
- Le développement des capacités d'adaptation à des situations nouvelles, des aptitudes à la découverte de stratégies.
- L'encouragement à l'activité, à la curiosité, à l'autonomie.
- L'acquisition d'un nombre restreint de connaissances de base.

Cet enseignement devra être assez large, assez souple et assez différencié pour que tout élève, quels que soient ses aptitudes intellectuelles ou son environnement socio-culturel, soit confronté à des tâches adaptées à son niveau, à propos desquelles il ait la possibilité de se réaliser, de réussir, de créer.

Compte tenu de ce qui précède, les hypothèses de recherche seront :

- a) L'enseignement actuel de l'arithmétique ne donne pas, à une grande partie des élèves, les instruments dont ils ont besoin au terme de la scolarité obligatoire.
- b) Dans son état actuel, cet enseignement ne peut être amélioré par des retouches de détail.
- c) Les expériences basées sur la mathématique dite moderne ouvrent une voie intéressante.
- d) Cette approche s'inscrit, mieux que l'enseignement traditionnel, dans le développement du raisonnement logico-mathématique de l'enfant.

- e) Une réforme limitée à des modifications de contenu reste inopérante. La didactique de l'enseignement doit être modifiée de telle sorte que l'enseignement soit remplacé par l'apprentissage et l'activité de répétition par une activité de recherche et de construction.
- f) La réforme ne peut réussir que si elle rencontre l'adhésion du corps enseignant. Celui-ci doit, à cette fin, être largement associé à la recherche. Dans la phase initiale, il doit être constamment informé, conseillé, sécurisé. Mais l'activité des formateurs ne doit en aucun cas le priver d'une autonomie indispensable à son autosatisfaction et à son efficacité.
- g) Le contrôle des effets du nouvel enseignement ne peut se limiter à un groupe expérimental restreint. Il est nécessaire de le mesurer dans des conditions aussi proches que possible de la réalité scolaire. Il convient en particulier de se méfier des effets d'un engouement provoqué seulement par l'attrait de la nouveauté.
- h) La réforme ne favorisera pas une catégorie particulière d'élèves. En particulier, elle participera aux efforts engagés pour une véritable démocratisation de l'enseignement.

Première partie

LE CONSTAT D'UNE SITUATION

4. LES CONNAISSANCES DES ELEVES AU TERME DE LEUR SCOLARITE OBLIGATOIRE

Il est extrêmement difficile de porter un jugement à long terme sur les effets d'un enseignement.

Grâce à la compréhension des autorités scolaires, nous avons eu le grand privilège de pouvoir effectuer une enquête auprès de quelques 2500 élèves parvenus à la fin de la scolarité obligatoire. L'objectif de l'enquête consistait en une tentative de détermination de la manière dont les élèves de 15-16 ans, qu'ils soient en apprentissage ou qu'ils poursuivent des études dans le second degré, avaient assimilé et retenu les notions élémentaires d'arithmétique enseignées durant les sept premières années de scolarité.

Avant d'envisager une réforme, il convient en effet de vérifier l'impact de l'enseignement et d'en déceler les lacunes éventuelles. Par sa nature même, l'école primaire dispense un enseignement destiné à tous les élèves, quel que soit leur niveau de développement intellectuel.

C'est la raison pour laquelle, lors de la construction du test, ce sont plus les besoins des apprentis qui ont été pris en considération que ceux des élèves poursuivant des études longues.

En d'autres termes, l'école élémentaire a eu jusque dans un passé récent et a encore pour un certain nombre d'élèves peut-être, la mission de préparer les jeunes gens et les jeunes filles pour leur entrée dans la vie professionnelle.

La question que nous nous sommes posée a été de savoir dans quelle mesure, en ce qui concerne l'arithmétique, cette mission était remplie.

L'organisation d'une enquête dans l'enseignement secondaire et professionnel se heurte à un problème de temps. En effet, le nombre des heures disponibles pour l'enseignement d'une discipline est toujours trop faible au gré de celui qui l'enseigne et le fait de distraire un temps donné pour étudier le savoir des élèves n'est pas accepté sans des garanties sérieuses quant à l'utilité d'un tel sondage.

Cette situation est encore plus marquée dans les écoles recevant les apprentis, ceux-ci ne suivant des cours qu'à raison d'une journée par semaine.

Il fallait donc que l'enquête respecte les conditions suivantes :

- a) Répondre à un besoin réel de l'école professionnelle pour l'industrie et l'artisanat.
- b) Fournir le maximum d'informations avec le minimum de temps d'interrogation.
- c) Donner des renseignements sur les connaissances individuelles des élèves quelques jours seulement après la passation de l'épreuve.

La première condition s'est trouvée réalisée par le fait que l'école professionnelle, désirant organiser des cours de rattrapage pour les élèves ayant des difficultés particulières en mathématique, souhaitait un contrôle pour le dépistage des sujets qui devaient être astreints à cet enseignement supplémentaire.

La seconde condition a conduit à l'élaboration de deux formes de l'épreuve, parallèles quant à leur qualité de détermination du rendement de l'élève, mais donnant le moyen de doubler le nombre des questions posées. Dans toutes les classes, la moitié des élèves a été soumise à la première forme, l'autre moitié à la seconde forme du test.

Enfin la dernière condition soulevait le problème de la correction des travaux et devait être résolue par la création d'un test à choix multiples et la mise au point d'un système de transcription rendant possible la correction des travaux au moyen d'un lecteur optique de documents.

La construction de l'épreuve a été guidée par le souci de déterminer, nous l'avons dit plus haut, l'étendue des connaissances des élèves

entrant dans le dixième degré par rapport aux besoins de ceux d'entre eux qui ne poursuivent pas d'études à temps plein au-delà de la scolarité obligatoire.

Dans une première approximation, il est apparu que les notions arithmétiques indispensables à un jeune homme ou à une jeune fille qui entre, à l'âge de quinze ans, dans la vie professionnelle, figurent toutes dans les programmes des sept premières années de scolarité.

La version définitive du test se présente sous la forme de deux épreuves parallèles de 30 problèmes chacune. La durée effective de passation est de 60 minutes auxquelles s'ajoute le temps nécessaire pour l'organisation du travail et la lecture des instructions et des exemples.

5. LES CONNAISSANCES DES ELEVES DU DIXIEME DEGRE EN ARITHMETIQUE ELEMENTAIRE

5.1 Population

En octobre 1966, 2529 élèves du dixième degré ont été soumis à la version définitive du test. Théoriquement, les sujets venaient donc d'achever la scolarité obligatoire et avaient entre 15 et 16 ans. En réalité, à la suite de redoublement de classes, bon nombre d'entre eux étaient plus âgés et, parmi les apprentis, une assez forte proportion des sujets n'était pas parvenue jusqu'au neuvième degré.

Les apprentis se répartissent en une multitude de professions diverses. Pour des raisons d'ordre statistique, le traitement séparé de chaque profession aurait été difficile. En effet, selon les métiers, le nombre des sujets passe de 1 (opticiens) à 75 (monteurs-électriciens). Sur les indications fournies par les responsables de l'école professionnelle pour l'industrie et l'artisanat, les élèves ont été répartis en 6 groupes, en fonction des exigences requises sur le plan des mathématiques. La répartition des professions à l'intérieur des groupes est la suivante :

Groupe 1 :

Bouchers-charcutiers, boulangers-pâtisseries, cuisiniers, horticulteurs, pâtisseries-confiseurs, sommeliers.

Groupe 2 :

Appareilleurs, carreleurs, carrossiers, conducteurs-typographes, ferblantiers, maçons, métiers divers, monteurs en chauffage, peintres en bâtiment, peintres en voitures, ramoneurs, serruriers.

Groupe 3 :

Arts graphiques, bijoutiers, coiffeurs, courtèpointières, décorateurs-étalagistes, droguistes, ébénistes, ensembliers, fleuristes, fourreurs, graphistes, menuisiers, métiers du cuir, parure, photographes, régisseurs de spiraux, tapisseries-décorateurs, techniciens-dentistes.

Groupe 4 :

Electriciens-autos, mécaniciens, mécaniciens-autos, mécaniciens cycles-motos, mécaniciens électriciens, opticiens.

Groupe 5 :

Compositeurs typographes, dessinateurs en bâtiment, chauffage, génie civil, machines, employés de laboratoire.

Groupe 6 :

Mécaniciens en électronique, monteurs électriciens, radio-électriciens.

Le tableau ci-dessous précise la manière dont les sujets se distribuent dans les différentes écoles.

Type d'école	Nombre de sujets	Pourcentage
École professionnelle pour l'industrie et l'artisanat		
. Apprentis groupe 1	77	3.1
. " " 2	120	4.7
. " " 3	195	7.7
. " " 4	188	7.4
. " " 5	120	4.7
. " " 6	90	3.6
	790	31.2
Cours complémentaires commerciaux		
. Apprentis comptables	254	10.0
. " vendeurs(euses)	122	4.8
. " de secrétariat	45	1.8
. " en pharmacie	32	1.3
	453	17.9
. Ecole des arts et métiers	98	3.9
École ménagère		
. Ateliers 3e année	82	3.2
. Apprenties	29	1.2
	111	4.4
École technique supérieure		
. Architecture	108	4.3
. Mécanique. Electricité. Horlogerie	201	7.9
	309	12.2
. Ecole de commerce	189	7.5
Collège de Genève		
. Section scientifique	160	6.3
. " latine	243	9.6
. " classique	50	2.0
. " moderne	85	3.4
. " de culture générale	41	1.6
	579	22.9
Population totale	2529	100

Répartition des sujets selon l'école

5.2 Résultats généraux

Pour l'ensemble des élèves interrogés, le rendement moyen s'élève à 45 % environ dans la forme A et à 48 % dans la forme B.

Les paramètres des distributions des scores sont :

Forme A	Moyenne : 13,45	Ecart-type : 6,96
Forme B	Moyenne : 14,32	Ecart-type : 7,16

Bien que les courbes obtenues s'éloignent assez nettement de la distribution normale, nous avons estimé la signification de la différence entre les moyennes selon la formule du "t" de Student. L'obtention d'un "t" de 3,29, significatif au seuil de 1 %, semble indiquer que la forme B est un peu plus facile que la forme A.

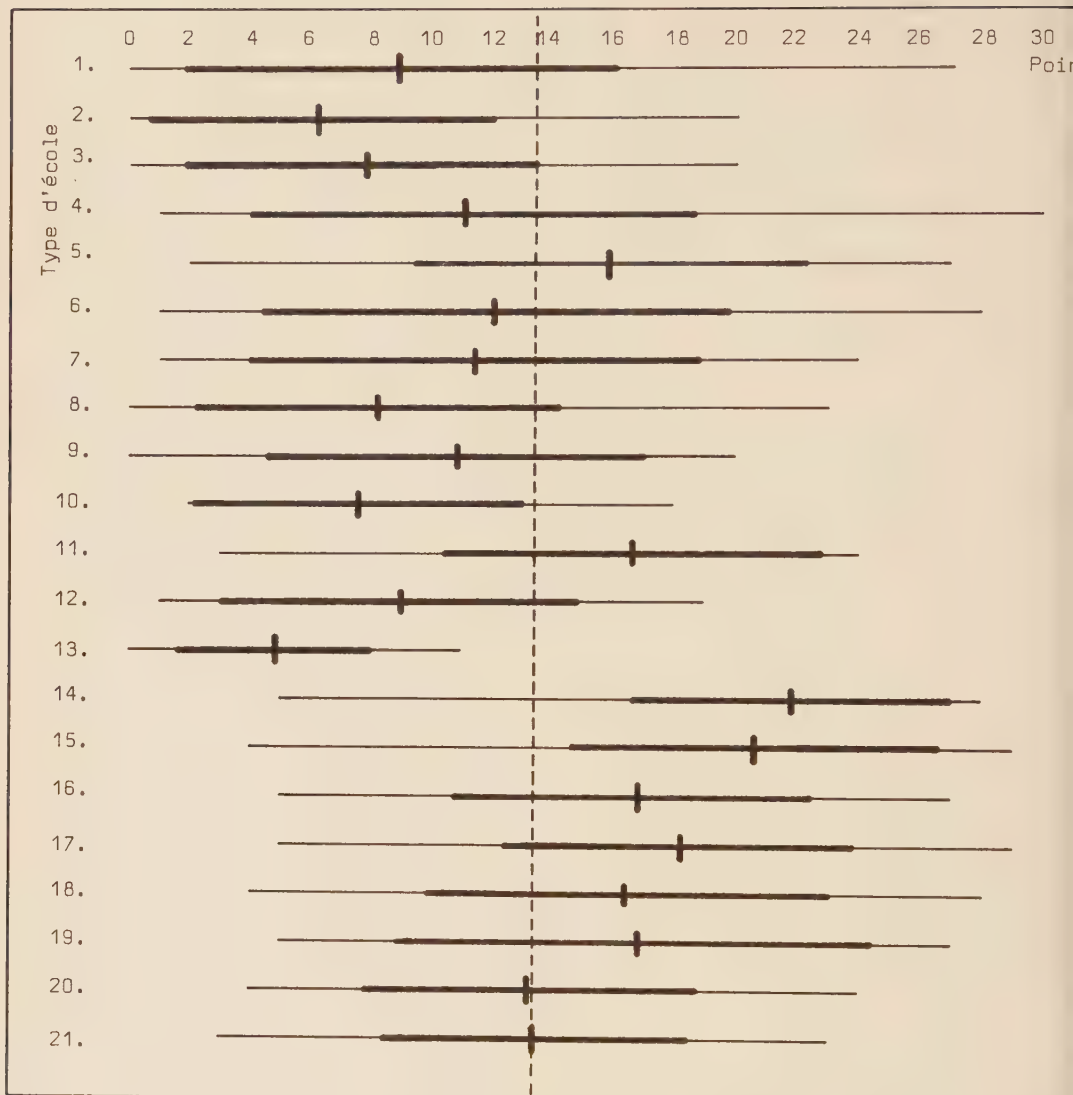
Notons au passage que le test peut être considéré comme fidèle. Il a été appliqué, à l'école professionnelle pour l'industrie et l'artisanat seulement, trois années consécutives. La forme des distributions est restée exactement la même et les moyennes n'ont pas varié de plus de 0.05 points.

Si la moyenne globale est intéressante en tant que donnée brute - le test pouvant être considéré comme un bon échantillon des notions enseignées à l'école primaire -, les élèves du dixième degré ne dominent pas la moitié de ces notions, il est bien évident que seule l'analyse par groupes présente un intérêt véritable.

Type d'école	Forme A				Forme B			
	N	M	σ	Rdt en %	N	M	σ	Rdt en %
Ecole professionnelle pour l'industrie et l'artisanat :								
1. Apprentis groupe 1	40	8.9	6.78	30	37	9.4	6.78	31
2. " " 2	58	6.3	4.82	21	62	8.5	6.13	28
3. " " 3	96	7.7	5.00	26	99	8.8	5.81	29
4. " " 4	97	10.9	6.72	36	91	12.2	6.24	41
5. " " 5	59	15.7	5.60	52	61	16.4	7.01	55
6. " " 6	44	12.0	6.62	40	46	11.5	6.43	38
Cours complémentaires commerciaux								
7. Apprentis comptables	131	11.4	6.49	38	123	12.5	6.05	37
8. " vendeurs(euses)	60	8.1	5.28	27	62	8.6	5.22	28
9. " de secrétariat	23	10.8	5.47	36	22	8.8	4.51	29
0. " en pharmacie	16	7.6	4.68	25	16	13.2	5.69	44
1. Ecole des arts et métiers	52	14.6	5.43	49	46	16.3	5.77	54
Ecole ménagère								
2. Ateliers 3e année	42	9.1	5.00	30	40	7.8	4.26	26
3. Apprenties	14	4.9	2.86	16	15	5.0	4.36	17
Ecole technique supérieure								
4. Architecture	54	21.8	4.51	73	54	21.2	4.51	71
5. Mécanique. Electricité. Horlogerie	104	20.6	5.20	69	97	22.3	4.25	74
6. Ecole de commerce	95	16.8	4.90	56	94	17.2	5.36	57
Collège de Genève								
7. Section scientifique	80	18.1	4.89	60	80	19.7	4.59	66
8. " latine	123	16.4	5.72	55	120	17.2	5.82	57
9. " classique	24	16.8	6.60	56	26	17.6	6.48	59
0. " moderne	44	13.2	4.69	44	41	15.7	5.50	52
1. " de culture générale	21	13.4	4.38	45	20	13.3	4.66	44
Population totale	1277	13.4	6.96	45	1252	14.3	7.16	48

Résultats généraux

Nombre de sujets. Moyenne. Ecart-type. Rendement.



Forme A. Représentation graphique, par type d'école, de la marge de variation et de la moyenne. La marge de variation est indiquée par la ligne horizontale. Le trait vertical marque la position de la moyenne. La ligne pointillée représente la moyenne de la population totale. Le renforcement du trait horizontal précise la zone théorique ($\pm 1,15 \sigma$) dans laquelle on devrait trouver 75 % des sujets si la distribution était normale.

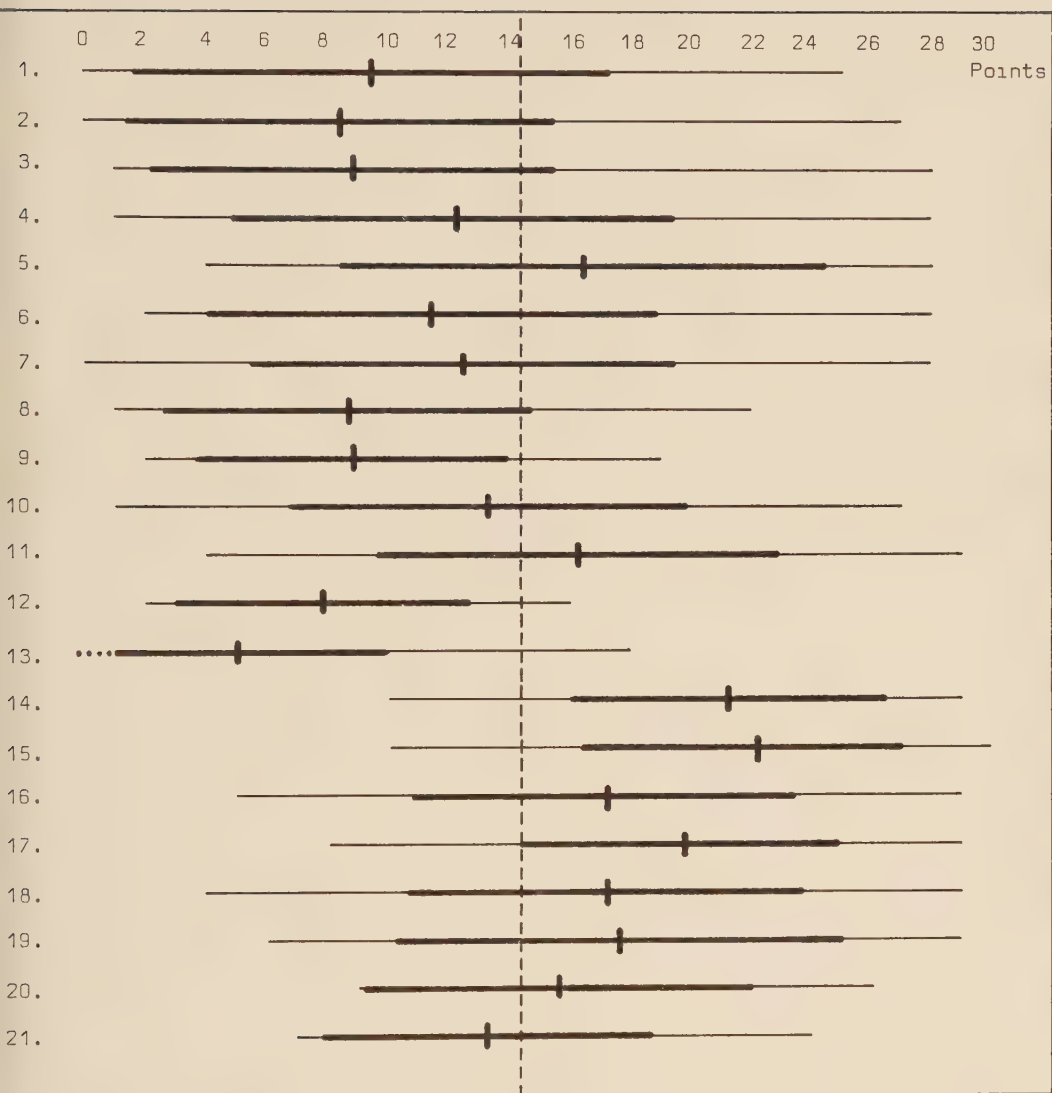
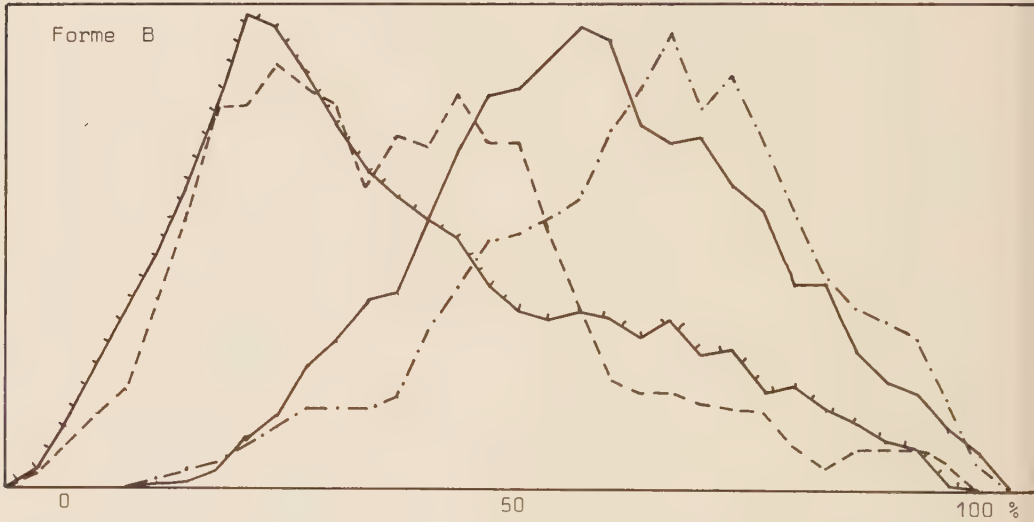
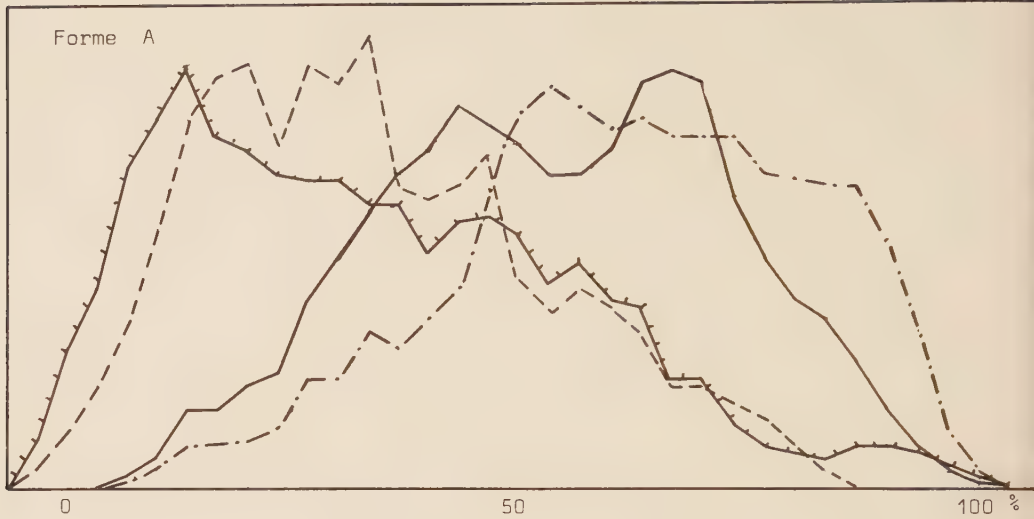


Figure B. Représentation graphique, par type d'école, de la marge de variation et de la moyenne. La marge de variation est indiquée par la ligne horizontale. Le trait vertical marque la position de la moyenne. La ligne pointillée représente la moyenne de la population totale. Le renforcement du trait horizontal précise la zone théorique ($\pm 1,15 \sigma$) dans laquelle on devrait trouver 75 % des sujets si la distribution était normale.



Comparaison des polygones de fréquences polis (ramenés à la même échelle)

- _____ Enseignement secondaire général :
Collège de Genève
- Enseignement secondaire professionnel à plein temps :
Ecoles techniques, Ecole supérieure de Commerce
- _____ Enseignement professionnel à temps partiel :
Apprentis de l'industrie et de l'artisanat (EPIA)
- _____ Enseignement professionnel à temps partiel :
Apprentis du commerce.

L'examen des tableaux qui précèdent fait tout d'abord ressortir l'extraordinaire hétérogénéité des résultats. Rappelons que le test constitue un échantillonnage de ce que l'on peut considérer comme le bagage minimum que tout élève devrait avoir assimilé au terme de la scolarité obligatoire. Or, quelques cas particuliers mis à part, la marge de variation dépasse les deux tiers des points. Dans toutes les classes, même dans celles qui conduisent à l'obtention du certificat de maturité, l'hétérogénéité des rendements individuels est considérable.

Dans les deux formes, on relève une différence importante entre les apprentis d'une part et les élèves des écoles secondaires générales ou professionnelles d'autre part. Néanmoins, la très large interpénétration des histogrammes laisse à penser que, si l'on trouve parmi les apprentis un petit groupe d'excellents sujets en arithmétique, une fraction importante des élèves de toutes les écoles n'a pas assimilé - ou n'a pas retenu, ce qui revient au même - des notions qui ont pourtant été considérées jusqu'ici et par tout un chacun comme indispensables.

L'analyse des moyennes, ou plus précisément des rendements moyens pour faciliter les comparaisons, est fort instructive. Elle soulève cependant une question fondamentale : qu'est-ce qu'un rendement satisfaisant ? Dans la pratique pédagogique, on s'accorde généralement pour estimer que le rendement est suffisant lorsqu'il atteint 75 % du total des points d'une épreuve. Mais il faut bien dire que le jeu est souvent faussé du fait que les constructeurs d'épreuves et de tests, en raison d'un manque d'objectifs précis, choisissent leurs items de telle manière que le rendement obtenu s'approche autant que possible de ce 75 %. On ajoute des questions en marge du programme à tester lorsque celui-ci est si restreint que la quasi-totalité des sujets l'a assimilé; on élimine les items trop difficiles même s'ils sont tirés du noyau fondamental des notions enseignées.

Nous n'avons que très partiellement échappé à cette difficulté. L'étude exhaustive des plans d'études et le recours à des spécialistes pour la détermination des items à retenir nous donnaient une certaine garantie quant aux objectifs. Cependant, l'élimination des items réussis par moins de 10 % ou plus de 90 % des sujets lors des premiers essais joue inévitablement un rôle sur le rendement obtenu. C'est donc beaucoup plus la comparaison des rendements entre eux que l'obtention d'une valeur normative qui nous paraît devoir être prise en considération.

L'ensemble des informations recueillies peut être ramené à quatre grands groupements.

- a) Groupes ayant obtenu un rendement inférieur au tiers des points, soit ayant réussi moins de 10 items sur 30 :

Apprentis des groupes 1, 2 et 3 - Apprentis vendeurs - Apprentis de secrétariat (Forme B), en pharmacie (Forme A) - Ecole ménagère, ateliers et apprenties.

- b) Groupes ayant obtenu un rendement inférieur à 50 %, soit ayant réussi moins de 15 items sur 30 :

Apprentis des groupes 4 et 6 - Apprentis comptables, de secrétariat (Forme A), en pharmacie (Forme B). Ecole des arts et métiers (Forme A). Collège de Genève, section moderne (Forme A), section de culture générale.

- c) Groupes ayant obtenu un rendement inférieur aux deux tiers des points, soit ayant réussi moins de 20 items sur 30 :

Apprentis groupe 5 (mécaniciens en électronique, monteurs électriciens, radio-électriciens). Ecole des arts et métiers (Forme B). Ecole de commerce. Collège de Genève, section scientifique, section latine, section classique, section moderne (Forme B).

- d) Groupes ayant obtenu un rendement inférieur à 75 %.

Ecole technique supérieur, architecture, mécanique, horlogerie, électricité.

Sans tenir compte de l'école fréquentée, les sujets se distribuent comme suit :

Rendement	Forme A		Forme B	
Moins de 33 %	35 %	60 %	30 %	55 %
Entre 33 et 50 %	25 %		25 %	
Entre 50 et 67 %	20 %		21 %	
Entre 67 et 75 %	10 %	20 %	9 %	24 %
Entre 75 et 100 %	10 %		15 %	

Si l'on admet, ainsi que l'on fait les maîtres des écoles professionnelles de Suisse romande, que le test constitue un bon reflet des notions que devraient connaître les apprentis, le bilan est à la fois clair et effarant.

Plus de la moitié des apprentis réussissent moins d'un tiers des items. C'est donc, et l'analyse des items permettra de le préciser, que les quelque mille heures consacrées à l'enseignement de l'arithmétique ont en grande partie été des heures perdues pour ces élèves.

Mais il y a plus. On pourrait considérer que, dans une école de type sélectif telle que nous la connaissons, ces élèves ont été tout simplement sacrifiés au profit de ceux qui, poursuivant des études longues, devaient assimiler les notions prévues au plan d'étude. Or il s'avère que dans ces écoles aussi, les rendements restent relativement médiocres. En effet, seuls les élèves de l'école supérieure technique obtiennent un rendement proche de 75 % et l'on peut à juste titre s'étonner de voir que, même dans les écoles de type gymnasial, le rendement ne dépasse guère 50 %.

Que faut-il en conclure ? L'école a-t-elle failli à sa mission ? Ou n'a-t-elle pas plutôt surestimé à la fois les capacités réelles des élèves ainsi que l'intérêt et l'utilité des notions enseignées ?

Si ces notions étaient véritablement importantes, nul doute que l'enseignement du second degré les auraient reprises à son compte pour tenter de les faire acquérir aux élèves. Or il est bien connu que les programmes du second degré portent sur des domaines qui n'ont qu'un très lointain rapport avec ceux qui ont été abordés à l'école élémentaire.

Nous en arrivons donc à relever le paradoxe suivant :

Les notions enseignées pendant la scolarité obligatoire ne peuvent être assimilées par les sujets qui en auraient besoin alors qu'elles ne présentent que très peu d'intérêt pour ceux qui auraient les moyens intellectuels de les acquérir dans la forme où elles sont enseignées. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce sujet dans la dernière partie de notre ouvrage.

Pour l'instant, il convient d'étudier de plus près la composition du groupe des apprentis, les variables retenues étant la provenance scolaire, le milieu socio-culturel et l'âge.

Les distributions générales ont montré que les apprentis de commerce et ceux de l'industrie et de l'artisanat obtenaient des résultats très voisins. Pour disposer d'une masse statistique suffisante, nous les avons groupés dans l'analyse qui suit.

5.3 Les apprentis : influence de la provenance scolaire

Sur les 1243 apprentis recensés, 1036 se trouvaient dans les écoles genevoises l'année précédente. Nous n'avons retenu que les 885 sujets provenant des degrés 6 à 10 de l'enseignement public officiel.

Provenance	Forme A			Forme B		
	N	m	Rdt	N	m	Rdt
6e degré	10	4,3	14%	10	5,8	19%
7e degré	66	6,1	20%	83	6,2	21%
8e degré	144	10,1	34%	141	10,2	34%
9e degré	143	11,7	39%	145	13,8	46%
10e degré						
apprentissage	58	6,7	23%	49	11,5	38%
écoles	21	14,0	47%	15	13,6	45%

Un tiers des apprentis ont suivi une filière que l'on pourrait qualifier de "normale". C'est-à-dire qu'ils entrent en apprentissage après avoir accompli les neuf années de scolarité obligatoire, souvent d'ailleurs au prix d'une dixième ou d'une onzième année d'étude car nombre d'entre eux ont refait une ou deux classes en cours de scolarité.

Un autre tiers des sujets quitte l'école au terme de la huitième année. Ce sont des élèves qui, le plus souvent, ont doublé une seule classe au cours de leur scolarité et qui, parvenus à l'âge de 15 ans révolus, entrent en apprentissage sans avoir effectué une scolarité élémentaire complète.

Un apprenti sur cinq quitte l'école avec un handicap de deux, ou parfois de trois années scolaires non suivies.

Enfin les sujets provenant du dixième degré, un élève sur six, doivent être partagés en deux sous-groupes très différents. Les uns, les plus nombreux, sont des adolescents qui, ayant échoué lors de leur première année d'apprentissage, recommencent celui-ci ou en entreprennent un autre moins difficile. Par exemple, après un échec en mécanique, le sujet se tourne vers le métier de peintre en bâtiment ou de carrossier. Il n'a pas été possible de déterminer la provenance antérieure de ces sujets mais il est certain que la très grande majorité d'entre eux avaient eu une scolarité écourtée.

L'autre partie de ce sous-groupe ne représente que 4% du nombre total des apprentis. Il s'agit d'élèves qui, après la scolarité obligatoire, ont essayé pendant un an de poursuivre des études gymnasiales ou commerciales et qui, à la suite d'un échec, bifurquent vers l'apprentissage. Nous les retrouvons en général dans les métiers de dessinateur, électricien, employé de laboratoire ou employé de bureau.

L'observation des rendements obtenus montre que la médiocrité des résultats ne peut que très partiellement être imputée à des scolarités inachevées. En effet, les élèves sortant régulièrement du neuvième degré n'atteignent pas, et d'assez loin, un rendement de 50% tandis que ceux qui quittent l'école au terme de la huitième année - rappelons que le test ne fait qu'effleurer le programme du septième degré - n'obtiennent qu'un rendement de 34%.

Ainsi notre première affirmation se trouve confirmée. L'enseignement de l'arithmétique donné aux futurs apprentis ne leur convient pas. Il reste en grande partie hors de leur portée. Nous ne discuterons pas ici si la raison doit en être imputée au contenu de l'enseignement ou aux méthodes et moyens employés pour faire assimiler ce contenu mais le problème est posé d'une manière très nette.

5.4 Les apprentis : influence de l'âge

Il est évident que les informations concernant l'âge des sujets recourent, dans une certaine mesure, celles que donne la provenance scolaire. Néanmoins, il a paru intéressant de tenir compte de ce facteur en ne considérant pas cette fois les seuls élèves provenant de l'enseignement public genevois mais l'ensemble des sujets pour lesquels nous possédions cette donnée, (il n'a pas été tenu compte des 46 sujets âgés de plus de 18 ans) soit 1037 apprentis sur 1243.

Trois groupes ont été constitués :

15 ans : Sujets nés après le 31.8.1951. Ils sont dans le degré "normal" par rapport à leur âge mais n'ont pas forcément suivi comme nous l'avons vu plus haut, les neuf degrés de la scolarité obligatoire.

16 ans : Sujets nés entre le 1.9.1950 et le 31.8.1951. Ces sujets pouvaient être, théoriquement dans le onzième degré. Ils ont suivi une année d'école après la date de leur libération scolaire ou ils recommencent un apprentissage soit à la suite d'un échec, soit parce que le premier métier choisi ne leur a pas convenu.

17-18 ans: Sujets nés entre le 1.9.1948 et le 31.8.1950. Ces élèves ont poursuivi leur scolarité deux ou trois ans au-delà de l'âge légal de libération scolaire.

Age	Forme A			Forme B		
	N	m	Rdt	N	m	Rdt
15 ans	241	9,2	31 %	235	10,2	34 %
16 ans	195	9,9	33 %	218	11,4	38 %
17-18 ans	78	11,6	39 %	70	13,5	45 %

Les différences ne sont pas très grandes. Elles sont cependant significatives, au seuil de 1 %, du point de vue statistique. Comme on l'a déjà constaté pour la provenance scolaire, il n'est pas possible de dire que la maturité due à l'âge permet à l'adolescent de maîtriser des notions qui seraient restées inachevées pendant la scolarité.

Il est intéressant de comparer la répartition des âges dans les différents types d'écoles :

Type d'école	15 ans	16 ans	17 ans	18 ans et plus
Apprentis	46 %	40 %	10 %	4 %
Arts et métiers	51 %	42 %	5 %	2 %
Ecole ménagère	45 %	46 %	5 %	4 %
Ecole supérieure technique	22 %	27 %	25 %	26 %
Ecole de commerce	41 %	40 %	18 %	1 %
Collège de Genève	62 %	32 %	6 %	-
Population totale	47 %	37 %	11 %	5 %

On remarquera dans ce tableau que l'école supérieure technique constitue un cas particulier. La moyenne d'âge y est nettement plus élevée que dans les autres écoles. On se souvient aussi que c'est dans cette école que les rendements les plus élevés ont été obtenus.

Comme on pouvait l'attendre, la moyenne d'âge la plus basse se trouve au collège de Genève. En effet, la majorité des élèves de cette école ont bénéficié d'une scolarité antérieure sans histoire tandis qu'un tiers d'entre eux doublait une seule classe.

Les autres écoles, et en particulier celles qui reçoivent les apprentis, ne se distinguent pas de la moyenne générale.

5.5 Le milieu socio-culturel

De nombreuses études ont montré que le milieu dans lequel vit l'enfant conditionne, parfois d'une manière assez forte, ses performances scolaires. Il apparaît donc utile de vérifier si cette différence se retrouve, à propos de l'arithmétique, dans un groupe aussi spécifique que celui des apprentis. Cette information a pu être obtenue pour 1026 sujets sur 1243.

Le critère retenu pour la division en trois catégories est la profession du père. Il ne fournit qu'une approximation assez grossière mais les limites de l'enquête ne nous permettaient pas une analyse plus fouillée.

Milieu inférieur :	Ouvriers de l'industrie et de l'artisanat, chauffeurs, employés de maison, employés de l'alimentation, manoeuvres, etc...
Milieu moyen :	Employés de bureau, fonctionnaires subalternes, petits commerçants, restaurateurs, agriculteurs, etc...
Milieu supérieur :	Universitaire, directeurs, cadres administratif, industriels, enseignants, employés et fonctionnaires supérieurs, etc...

Milieu	Forme A			Forme B		
	N	m	Rdt	N	m	Rdt
Inférieur	319	9,7	32 %	292	10,5	35 %
Moyen	150	10,0	33 %	180	12,5	42 %
Supérieur	44	11,1	37 %	41	12,1	40 %

Nous obtenons ici des résultats qui divergent d'une forme à l'autre.

Pour la forme A, la moyenne croît du groupe inférieur au groupe supérieur mais les différences ne sont pas significatives.

Dans la forme B, en revanche, les sujets du groupe inférieur se distinguent nettement des deux autres groupes, la différence étant significative au seuil de 1 %.

Il paraît difficile d'expliquer la différence observée entre les deux formes. Nous pouvons pourtant considérer que l'influence du milieu socio-culturel ne paraît pas jouer un rôle important sur les résultats enregistrés.

Comme en ce qui concerne l'âge, nous pouvons comparer les différentes écoles du point de vue de la répartition des sujets par milieu socio-culturel.

Type d'école	Inférieur	Moyen	Supérieur
Apprentis	60 %	32 %	8 %
Arts et métiers	31 %	43 %	26 %
Ecole ménagère	96 %	4 %	-
Ecole supérieure technique	39 %	37 %	24 %
Ecole de commerce	34 %	40 %	26 %
Collège de Genève	18 %	33 %	49 %
Population totale	46 %	32 %	22 %

Ces chiffres sont éloquentes. Ils ne montrent rien de nouveau mais confirment le rôle joué par le milieu socio-culturel sur la carrière scolaire des élèves.

Dans quelle mesure l'organisation scolaire peut-elle pallier les effets d'un milieu familial peu favorisant ? Une réforme de l'enseignement ne peut faire abstraction de ce facteur. Si l'école, fournissant ainsi ample matière aux humoristes, considère comme normal le recours à l'aide parentale pour l'apprentissage de la table de Pythagore ou la résolution des problèmes, elle condamne ipso facto une partie importante de la population scolaire à l'échec.

6. L'ANALYSE DES ITEMS

L'étude des performances globales des élèves au test d'arithmétique pour le dixième degré fournit une première indication : l'ensemble du programme ne semble pas assimilé. Dans la perspective d'une réforme à entreprendre, il est utile d'entrer plus avant dans le détail des choses et d'examiner quelles sont les notions spécifiques provoquant l'échec des élèves. C'est ce que permet l'analyse détaillée des items pour laquelle les sujets ont été groupés de la manière suivante :

APP INF.	Apprentissages inférieurs	Apprentis groupes 1, 2, 3 et vendeurs.
APP MOY.	Apprentissages moyens	Apprentis groupes 4, 6 et comptables.
APP SUP.	Apprentissages supérieurs	Apprentis groupe 5 et Arts et métiers.
ES GEN.	Enseignement secondaire général	Collège de Genève : sections latine et classique - Ecole de commerce.
ES SC.	Enseignement secondaire scientifique	Collège de Genève : section scientifique.
ES TECH.	Enseignement secondaire technique	Ecole supérieure technique.

L'effectif des sections ainsi constituées est de :

	SECTION	Forme A	Forme B
1.	Apprentissage inférieur	254	260
2.	Apprentissage moyen	272	260
3.	Apprentissage supérieur	111	107
4.	Enseignement sec. général	242	240
5.	Enseignement sec. scientif.	80	80
6.	Enseignement sec. tech.	158	151

Dans l'interprétation de l'analyse des items, il conviendra de tenir compte du fait que les rendements observés dans les différents groupes doivent toujours être considérés avec une marge de 4 à 10 %.

Voici le rendement moyen observé pour chaque notion :

NOTIONS	APP INF.	APP MOY.	APP SUP.	ES GEN.	ES SC.	ES TECH.	POP. TOTAL
1. Opérations sur nombres décimaux	44 %	56 %	66 %	71 %	79 %	80 %	63 %
2. Opérations sur fractions ordinaires	24 %	35 %	50 %	66 %	66 %	72 %	48 %
3. Comparaison de fractions écrites sous formes diff.	29 %	43 %	62 %	69 %	82 %	86 %	56 %
4. Temps et vitesse	14 %	21 %	37 %	39 %	44 %	60 %	32 %
5. Moyenne	34 %	42 %	56 %	66 %	68 %	73 %	53 %
6. Rapport	30 %	40 %	54 %	59 %	65 %	77 %	50 %
7. Partages inégaux	34 %	41 %	56 %	60 %	68 %	64 %	51 %
8. Poids et achat	29 %	42 %	46 %	55 %	62 %	58 %	46 %
9. Pourcentage	20 %	30 %	37 %	41 %	39 %	52 %	35 %
10. Calcul d'un angle	42 %	49 %	61 %	67 %	78 %	87 %	60 %
11. Calcul des aires	25 %	32 %	48 %	50 %	57 %	64 %	42 %
12. Volume	21 %	36 %	46 %	47 %	52 %	63 %	41 %
13. Cercle	7 %	14 %	30 %	22 %	30 %	41 %	21 %
Ensemble du test	27 %	38 %	53 %	56 %	63 %	72 %	47 %

Il faut tout d'abord relever la régularité des positions respectives des différentes sections. Dans 9 cas sur 13, le rendement croît des apprentis inférieurs à l'enseignement technique. Dans deux cas la section scientifique dépasse la section technique et dans un cas l'enseignement général est de peu supérieur à l'enseignement scientifique.

D'une manière générale, les notions classent les groupes de la même manière. A une exception près, les notions 1, 3 et 10 donnent les meilleurs rendements dans tous les groupes.

Entre la quatrième et la septième place, on trouve les notions 5, 6 et 7. Les notions 11 et 12 se situent entre la huitième et la dixième place. Viennent ensuite les notions 9 et 4, puis, dernière dans toutes les sections, la notion 13. Il n'y a donc que les notions 2 et 8 pour occuper des positions hétérogènes entre la quatrième et la onzième place.

La différence entre les sections ne provient donc pas du fait que certaines notions sont connues d'un groupe tandis que d'autres sont réussies par d'autres groupes mais la cause est bien à rechercher dans ce que l'enseignement reçu a été assimilé de manière partielle, avec un degré plus ou moins grand, quelle que soit la filière suivie par les adolescents.

Admettons, à titre de pure hypothèse, que les normes acceptables, étant donné le mélange de populations scolaires différentes, soit de 50 % pour les apprentissages inférieurs et moyens, 75 % pour les apprentissages supérieurs et l'enseignement secondaire général, 80 % pour l'enseignement scientifique et technique. La notion la mieux réussie par le groupe des apprentissages inférieurs, les opérations arithmétiques, n'atteint que 44 %. C'est cette même notion seulement qui, dans le groupe des apprentissages moyens, dépasse le seuil fixé. Le groupe intermédiaire, apprentissages supérieurs et enseignement secondaire général est inférieur au seuil fixé dans toutes les notions. Les élèves de la section scientifique ne dépassent la limite de 80 % que pour la comparaison de fractions écrites de différentes manières. Ils s'en approchent de près en ce qui concerne les opérations arithmétiques et le calcul des angles. Enfin, on peut considérer que les élèves de l'école supérieure technique maîtrisent les trois mêmes notions.

L'observation des données est une chose; l'approche explicative de ces mêmes données en est une tout autre. L'étude attentive des réponses des élèves nous amène à formuler un certain nombre de remarques et d'hypothèses que nous tenterons de vérifier par la suite.

Ce qui frappe tout d'abord, c'est la rigidité des mécanismes. Les élèves ont appris un certain nombre de règles, de formules, d'algorithmes. Ils ont enregistré en même temps quelques-unes des situations dans lesquelles ces règles s'appliquent, le lien entre les deux choses étant provoqué par des mots précis servant de stimuli,

Comme la plupart de ces notions ont été mémorisées et non véritablement assimilées, reconstruites par la pensée du sujet, il suffit que le mot-stimulus soit camouflé pour que le mécanisme se bloque.

En second lieu, il semble n'y avoir que très peu de liaisons entre les notions, même les plus proches. La relation entre addition et soustraction, entre multiplication et division, entre les formules permettant de calculer la surface des différents quadrilatères, par exemple, semble presque inexistante. L'enseignement a probablement été divisé en unités trop restreintes et les vues générales sur un ensemble de situations voisines ont manqué.

En outre, un enseignement basé sur la répétition et non sur la découverte personnelle - le maître expose une donnée nouvelle, les élèves effectuent ensuite des exercices se rapportant à cette donnée - ne paraît pas permettre, chez un grand nombre d'élèves, une assimilation en profondeur susceptible d'être généralisée et étendue à des situations nouvelles. Tout se passe comme si les élèves avaient enregistré un catalogue de formules comme ils auraient mémorisé une liste de noms géographiques ou de dates historiques. Ceux d'entre eux qui ont une bonne mémoire enregistrent une assez forte proportion des problèmes qui leur ont été présentés pour faire illusion et obtenir des résultats suffisants.

Un petit nombre de sujets, ceux qui ont la "bosse" des math, réussissent sans le secours de l'enseignement, ou peut-être malgré lui, à établir la synthèse de ce qu'ils ont appris et à donner à cet ensemble un caractère véritablement opérationnel. Mais la majorité des sujets ne peuvent échapper à une condition d'insécurité dans laquelle, peu à peu, des phénomènes affectifs viennent inhiber la résurgence et semer la confusion dans les quelques notions qu'ils auraient retenues.

En troisième lieu, on est frappé par la manière stéréotypée avec laquelle les élèves abordent les problèmes. Ils disposent, pour chaque situation, d'un mode de résolution qu'ils appliquent sans discernement, même si une stratégie plus économique saute aux yeux. Il se peut que l'enseignement primaire, où la plupart des maîtres exigent que l'enfant, dans la résolution d'un problème, écrive le détail de toutes les opérations, même de

celles qui pourraient aisément s'effectuer de tête, ait une part de responsabilité dans cette rigidité. Quoi qu'il en soit, les sujets ne semblent pas aborder un problème avec un esprit scientifique qui les pousserait à observer les données avec attention, à établir les relations entre les divers éléments, puis à chercher la stratégie la plus économique, la plus élégante, ou celle qui leur permet de résoudre le problème par un cheminement détourné en remplaçant une règle oubliée par une suite d'opérations conduisant au même résultat.

D'une manière générale, les élèves ont rarement été mis en présence d'un véritable problème, dans lequel la réponse implique une structuration complète des données et la découverte de la stratégie adéquate. La plupart du temps, ils ont eu à résoudre de faux problèmes dans lesquels la simple lecture du titre du chapitre donnait à coup sûr une grande partie de la marche à suivre.

On comprendra aisément que, au vu des résultats observés dans le dixième degré, nous n'ayons pas poursuivi notre étude dans la mise en place d'un système de rattrapage et de récupération mais que nous ayons tenté de mieux connaître comment les élèves ont élaboré les notions de base afin d'envisager ensuite une action dès le début de la scolarité. Ce sera l'objet du prochain chapitre.

7. L'ARITHMETIQUE A L'ECOLE PRIMAIRE

Le test auquel ont été soumis les élèves du dixième degré ne comprenait, à l'exception de la notion de volume, que des questions abordées au cours des six premières années de scolarité. C'est la raison pour laquelle il a paru souhaitable d'entreprendre une enquête afin de découvrir comment se construisent les principales notions arithmétiques au cours de la scolarité primaire. Il s'agissait de sonder le savoir des écoliers, de tirer en quelque sorte un bilan de l'enseignement tel qu'il a été donné jusqu'ici et de mettre en lumière la difficulté respective des notions figurant au plan d'études. Il fallait également tenter de déterminer, aussi exactement que possible, dans quelle mesure ces notions sont assimilées par les élèves et quelles sont, pour l'avenir scolaire de l'enfant, celles dont la méconnaissance l'empêchera de suivre avec succès un enseignement ultérieur. Il y aurait lieu, à ce propos, d'établir une hiérarchie concernant la valeur des notions enseignées, ce que les plans d'études, les programmes, les manuels, précisent bien rarement.

Or le nombre des notions absolument fondamentales est relativement restreint et les manuels sont souvent encombrés d'exercices dont le but, soi-disant utilitaire, se justifiait peut-être dans le passé mais n'a que peu de résonance dans le contexte de la société actuelle. Qui, mis à part l'écolier, a encore l'occasion d'utiliser les termes quintal, centiare, décagramme, etc... ? Est-il raisonnable de multiplier les exercices qui font transformer des kilomètres en millimètres ou des centigrammes en tonnes, de demander uniformément deux décimales dans l'expression du résultat d'une opération sans tenir compte du problème à résoudre, de passer de longues heures sur des problèmes de prix de vente, de bénéfice et de perte présentés dans une forme que jamais personne ne rencontrera dans la vie quotidienne.

Nos programmes sont encombrés par un grand nombre de notions que la tradition y a déposées sans que l'on se soit jamais préoccupé de leur réelle valeur formative ou utilitaire.

Nous nous trouvons donc en présence du problème que nous avons déjà rencontré lors de la construction du test pour le dixième degré : que faut-il contrôler, quelles questions doit-on introduire dans la batterie de tests ?

Devant la difficulté que nous éprouvions à nous donner un cadre théorique sûr, nous nous sommes bornés, étant donné le caractère essen-

tiellement descriptif de cette partie de l'étude, à l'établissement d'un classement permettant d'ordonner les notions qui nous paraissaient figurer implicitement ou explicitement, au programme de l'école primaire. Six grandes catégories ont été retenues :

1. Numération décimale :
 - 1.1 Itération
 - 1.2 Sériation
 - 1.3 Système de position
2. Opération arithmétiques :
 - 2.1 Associativité et commutativité
 - 2.2 Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
 - 2.3 Equivalences numériques
 - 2.4 Technique de résolution des opérations
3. Relation entre situations verbales et numériques :
 - 3.1 Questions faisant appel à des connaissances spécifiques (douzaine, paire, mois, année, etc..)
 - 3.2 Questions portant sur l'addition et la soustraction.
 - 3.3 Questions demandant multiplication ou division.
 - 3.4 Problèmes d'achat, vente, bénéfice, etc..
4. Approximation d'un résultat
5. Fonction linéaire (Notion de rapport)
6. Fractions ordinaires

La mise en relation du plan d'études des quatre degrés retenus (3e à 6e années primaires), avec les catégories ci-dessus a fourni la possibilité d'un choix parmi les innombrables questions susceptibles d'être posées.

L'objectif général de la batterie de tests ne sera donc pas de contrôler si l'enfant a acquis, dans la forme où elles lui ont été présentées, les connaissances qui lui ont été enseignées, mais bien d'essayer de voir dans quelle mesure ces connaissances sont devenues opératoires et sont entrées dans une structure générale. La construction des épreuves a commencé en 1967, au moment où nous

dispositions des données concernant le dixième degré. Durant l'année 1967-1968 l'essai et la mise au point des épreuves ont été effectués selon les méthodes habituelles de la recherche pédagogique.

La version définitive de la batterie comprend 16 épreuves administrées, de trimestre en trimestre, du début de la 3^e à la fin de la 6^e année primaire.,

Il est évident que, dans une enquête conduite avec toute la rigueur voulue, il aurait mieux valu que les mêmes sujets soient soumis aux 16 épreuves mais, de ce fait, l'enquête aurait dû s'étendre sur quatre ans et nous n'étions pas certains, dans une période de mutation pédagogique constante, que les conditions extérieures resteraient les mêmes pendant une aussi longue période.

Nous avons donc admis l'hypothèse que les quatre volées successives sur lesquelles porte l'étude puissent être considérées comme quatre échantillons de la même population.

L'épreuve de septembre, appelée aussi épreuve de rentrée, a été diffusée dans toutes les classes du canton de Genève. Elle a donc atteint plus de 11 000 élèves.

En fonction des résultats de cette première série, un échantillon stratifié de 20 classes par degré, représentatif de l'ensemble de la population scolaire, a été constitué pour être soumis aux tests de décembre, mars et juin.

Cette manière de faire nous permet, sans grand risque d'erreur, d'affirmer que les données recueillies donnent réellement une image correcte de la situation scolaire générale dans le domaine qui nous concerne, telle qu'elle se présentait durant l'année scolaire 1968-1969 pendant laquelle s'est déroulée l'enquête.

8. LES EPREUVES PRIMAIRES

8.1 Paramètres généraux

Le tableau ci-dessous fournit les éléments essentiels des données recueillies, à savoir :

n	=	nombre de sujets soumis à l'épreuve
max.	=	nombre maximum de points
m	=	moyenne
s	=	écart-type (sigma)
var	=	marge de variation (dernier et premier sujet)
rdt	=	rendement moyen de l'épreuve

a) Epreuves générales de rentrée - Septembre 1968 - Population totale

Degré	n	max	m	s	var	rdt
3e	2812	36	16,5	8,43	0-36	46 %
4e	3008	40	19,7	8,85	0-40	49 %
5e	3073	36	18,4	7,38	0-36	51 %
6e	2758	45	24,1	9,15	0-45	54 %

b) Batterie d'épreuves trimestrielles.

Les données de septembre sont celles de l'échantillon extrait de la population totale qui fut soumis ensuite aux trois autres épreuves.

	n	max	m	s	var	rdt
3e						
Septembre	566	36	17,0	8,15	0-36	47 %
Décembre	558	36	22,8	7,60	3-36	63 %
Mars	547	31	19,1	6,81	0-31	62 %
Juin	550	34	21,2	8,14	2-34	62 %

4e	n	max	m	s	var	rdt
Septembre	582	40	20,8	9,09	0-40	52 %
Décembre	542	40	24,8	8,81	1-40	62 %
Mars	500	26	14,8	6,16	1-26	57 %
Juin	505	32	20,1	7,61	2-32	63 %

5e	n	max	m	s	var	rdt
Septembre	528	36	18,0	7,29	1-36	50 %
Décembre	508	36	22,7	6,97	5-36	63 %
Mars	480	26	13,3	5,66	1-26	51 %
Juin	519	31	15,9	7,05	1-31	51 %

6e	n	max	m	s	var	rdt
Septembre	536	45	24,1	9,04	0-45	54 %
Décembre	503	45	29,1	9,39	3-45	65 %
Mars	496	32	18,6	7,00	3-32	58 %
Juin	487	33	17,3	5,73	1-33	52 %

La constitution d'échantillons représentatifs d'une population n'est pas toujours facile lorsqu'il faut manoeuvrer sur des classes entières de 25 à 30 élèves et non sur des individus isolés. En outre, nous souhaitons retenir des classes dont les titulaires, au bénéfice d'une formation complète, avaient une certaine expérience de l'enseignement. Enfin dans une enquête s'étendant sur une année scolaire, nous sommes toujours à la merci d'événements inattendus. C'est ce qui s'est produit en quatrième année, où la défection inopinée d'une classe au cours de l'enquête nous a obligés à une modification de l'échantillon. De ce fait, le groupe échantillon est légèrement supérieur à la population totale. La différence des moyennes, testée par le *t* de Student est ici significative au seuil de .01. Dans les trois autres degrés, la différence entre la moyenne de la population totale et celle de l'échantillon n'est pas significative à .05.

L'observation des graphiques qui suivent montre que la distribution de l'échantillon est très voisine de celle de la population totale. Le graphique a) présente le polygone de fréquences de la population totale et celui de l'échantillon soumis à la batterie des épreuves obtenus pour le test de septembre, que nous avons appelé épreuve générale de rentrée. Dans les quatre degrés, ces polygones sont très voisins.

Le graphique b) reproduit une seconde fois le polygone de fréquences de l'échantillon pour le comparer avec le test de décembre qui constitue une forme parallèle de la première épreuve. Il est ainsi possible de visualiser le gain obtenu à la suite de la période de révision du début de l'année scolaire.

Le graphique c) comprend les courbes de distribution des épreuves de mars et de juin.

Toutes les distributions ont été ramenées à une échelle commune afin de rendre les comparaisons plus faciles.

Nous ne pouvons manquer d'être frappés par l'hétérogénéité considérable des résultats obtenus par les élèves. Ce phénomène avait été relevé dans le dixième degré. Nous voyons ici qu'il trouve son origine dès le début de la scolarité primaire.

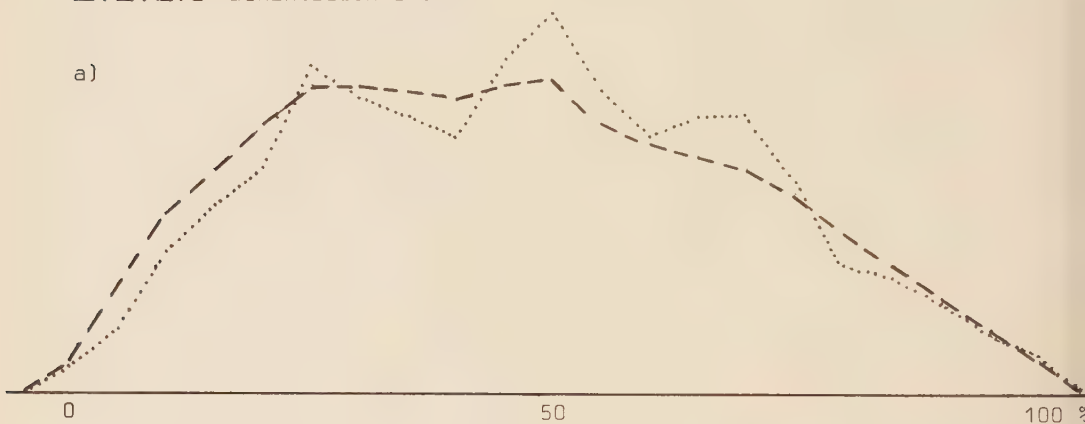
Le statisticien déduira immédiatement l'étendue de la courbe à partir de l'écart type qui représente plus de 20 % du total des points dans toutes les épreuves à l'exception du dernier test de sixième année. Pour le lecteur moyen, choisissons une autre image. Admettons que, par rapport à la moyenne, nous considérions comme normale une marge représentant la moitié des points du test. Ainsi pour une épreuve comptant 36 points et donnant une moyenne de 24, nous attendons que l'ensemble des sujets se situe entre 15 ($24 - 18/2$) et 33 ($24 + 18/2$). Les élèves extérieurs à ces deux bornes ont donc entre eux une différence de rendement qui dépasse 50 %. Calculons maintenant, pour chaque test, la proportion des sujets qui se situent en dehors de ces limites.

3e année

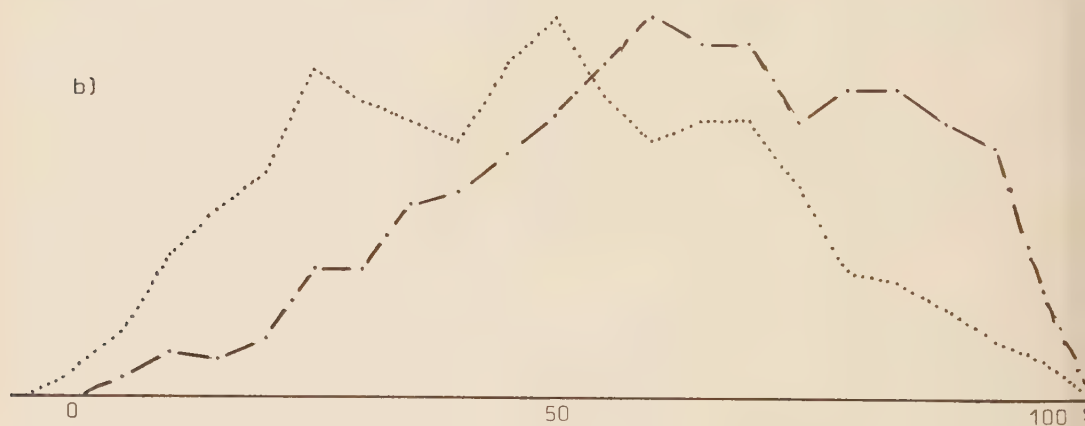
Distributions des résultats

----- Population totale septembre ▲▲▲▲▲▲ Echantillon mars
..... Echantillon septembre - - - - - Echantillon juin
- . - . - . Echantillon décembre

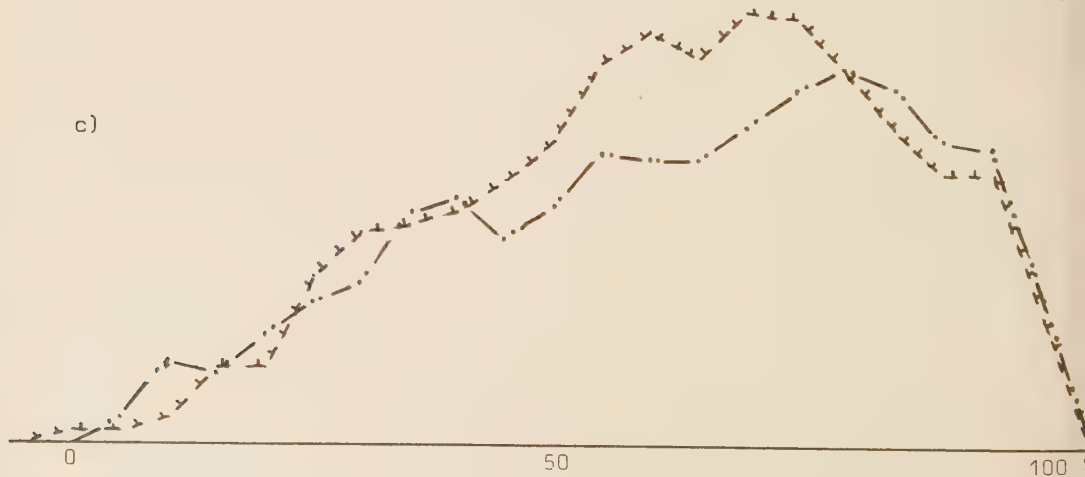
a)



b)

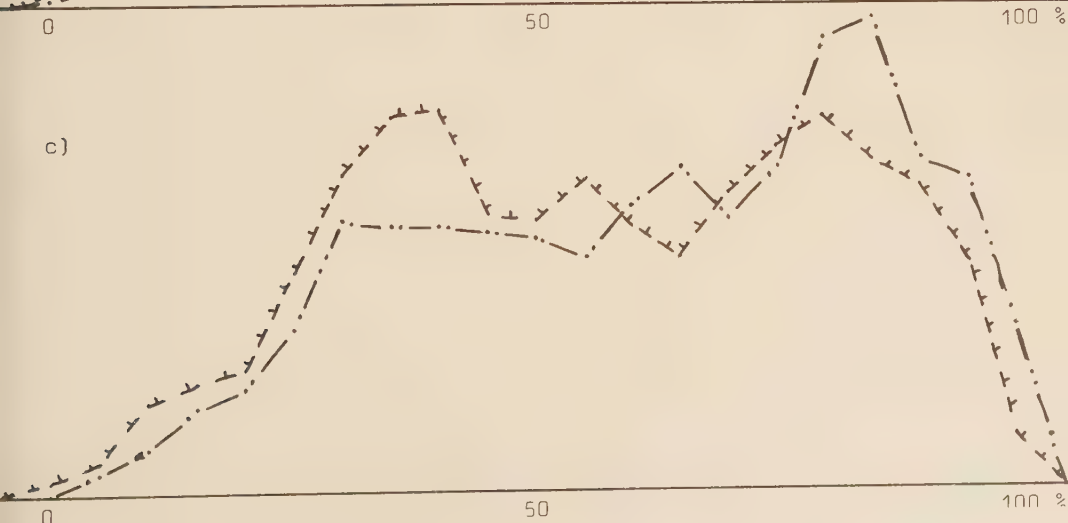
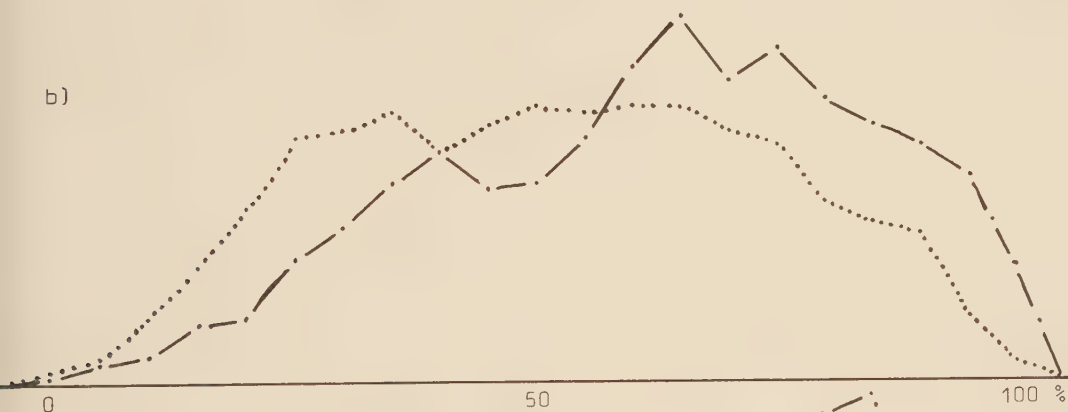
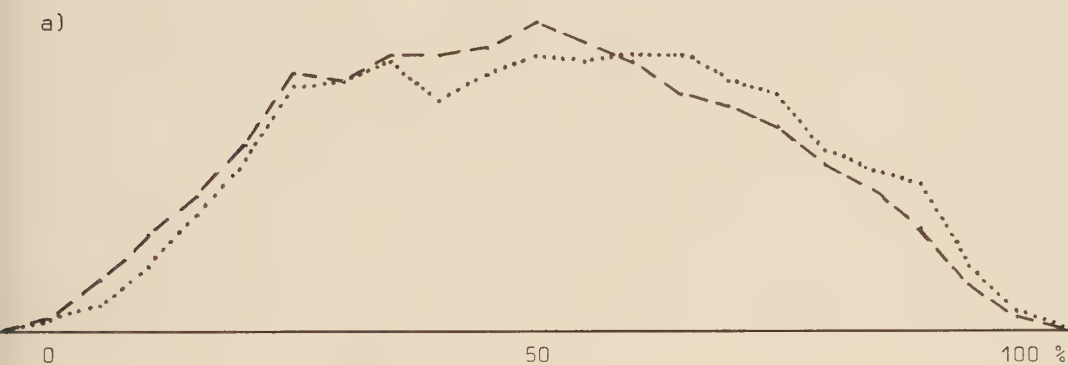


c)



4e année Distributions des résultats

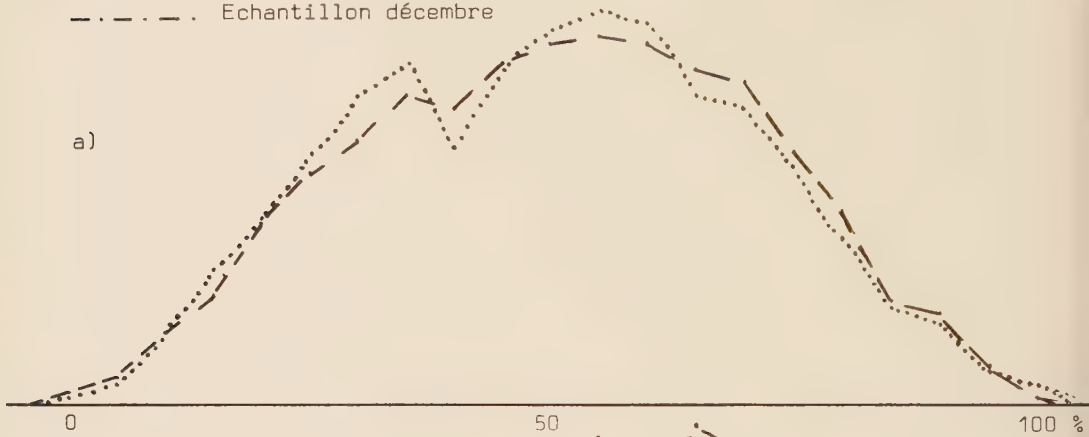
----- Population totale septembre ▲▲▲▲▲ Echantillon mars
..... Echantillon septembre - - - - - Echantillon juin
- Echantillon décembre



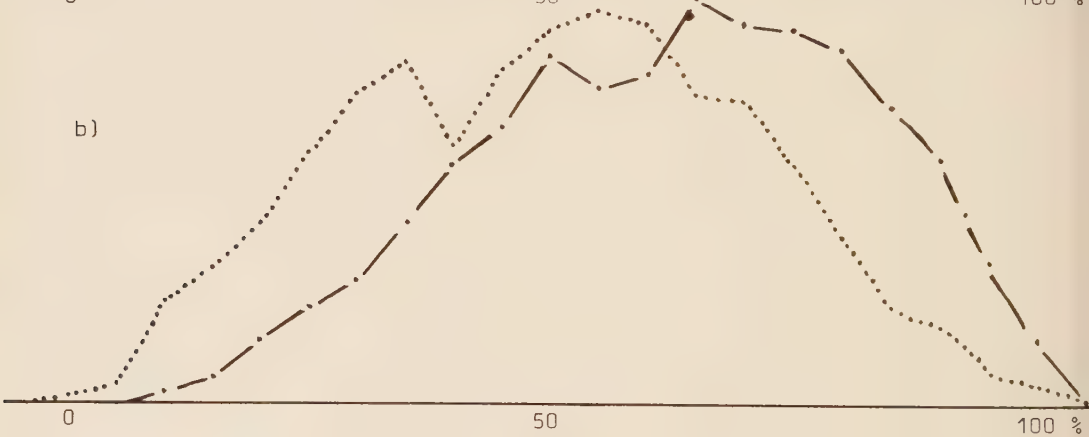
5e année Distributions des résultats

- - - - - Population totale septembre + + + + + Echantillon mars
 Echantillon septembre - . - . - Echantillon juin
 - . - . - Echantillon décembre

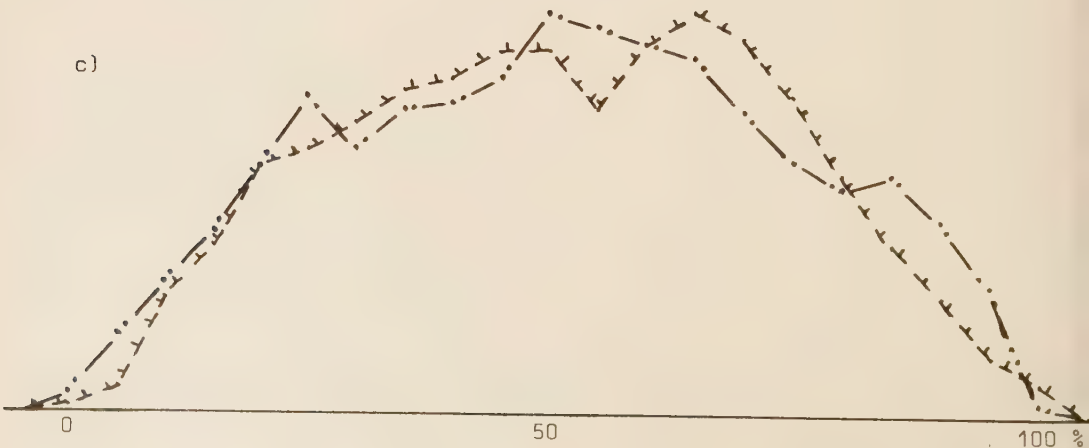
a)



b)



c)



6e année

Distributions des résultats

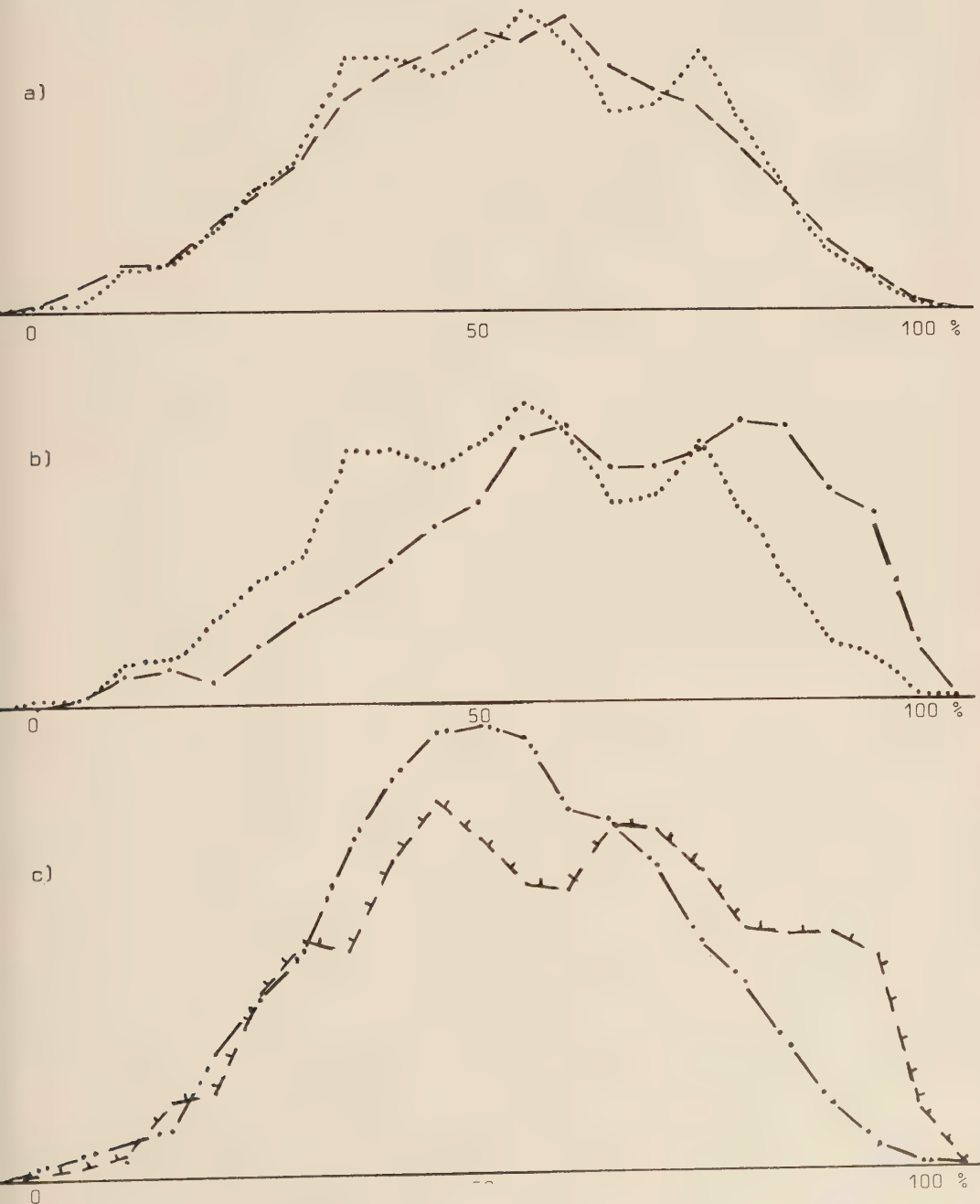
----- Population totale septembre

+ + + + + Echantillon mars

..... Echantillon septembre

--- -- Echantillon juin

-.-.-. Echantillon décembre



	3e		4e		5e		6e	
	INF	SUP	INF	SUP	INF	SUP	INF	SUP
Population totale :								
Septembre	17 %	17 %	14 %	16 %	14 %	12 %	12 %	11 %
Echantillon :								
Septembre	16 %	17 %	16 %	17 %	15 %	13 %	12 %	11 %
Décembre	15 %	16 %	15 %	15 %	11 %	9 %	12 %	12 %
Mars	16 %	15 %	17 %	17 %	14 %	16 %	15 %	16 %
Juin	17 %	17 %	16 %	14 %	19 %	17 %	11 %	11 %

En admettant, selon la pratique employée encore aujourd'hui dans la plupart des classes, que l'enseignement de l'arithmétique soit donné de manière collective pour la moyenne de la classe, cela signifie qu'un tiers des élèves de troisième ou de quatrième, un quart de ceux de cinquième ou de sixième, ne reçoit pas l'enseignement qui lui conviendrait. Même en tolérant une marge très large puisque nous avons accepté une différence de 50 % entre les meilleurs et les moins bons élèves, il faut se rendre à une évidence que le système scolaire nie encore par souci de simplification administrative. Un enseignement collectif de mathématique à l'école primaire, avec des exigences identiques pour tous, avec des maîtres contraints de tenir compte d'un plan d'études précis et non des facultés d'assimilation des individualités qui composent leur classe, constitue à la fois une utopie et un non-sens.

Utopie si l'on pense que des procédés pédagogiques ou des notions mathématiques nouveaux donneront la possibilité d'un enseignement collectif mieux adapté à tous. Non-sens si l'on admet comme normal qu'une partie importante des élèves traverse la scolarité dans une situation d'échec constant tandis qu'une autre partie des sujets ne reçoit pas le matériel qui lui permettrait de développer toutes ses virtualités. Quelle que soit la réforme entreprise ou à entreprendre, celle-ci est vouée à un semi-échec si l'on ne trouve pas les moyens, à l'intérieur de la classe, de différencier à la fois les travaux proposés et les exigences qui s'y rattachent.

La comparaison des données de septembre et de décembre suscite d'autres réflexions. Certes, on relève un progrès réel puisque le ren-

dement croît, selon le degré, de 10 à 13%. Mais il apparaît clairement que la moitié des élèves au moins aborderont les notions nouvelles de l'année avec un handicap certain.

Tout se passe comme si l'élève, n'ayant pas assimilé un certain type de notion, était considéré comme coupable au plus haut degré et n'avait qu'à se débrouiller, on ne sait d'ailleurs comment, pour acquérir les éléments qui pourraient lui faire défaut.

Prenons à ce sujet un exemple concret : nous avons vu, dans le test du dixième degré, que 45% des sujets ne résolvent pas correctement une soustraction; or celle-ci est, d'une manière générale, considérée comme connue au moment de l'entrée en quatrième année primaire et bien rares seront les maîtres qui consacreront du temps à la reprise détaillée de cette opération. Dans le meilleur des cas, on se bornera à donner à l'enfant des séries de soustractions à effectuer en pensant que l'exercice répétitif seul viendra à bout de la difficulté. Mais si l'enfant ne comprend pas le sens profond de ce qu'il fait, comment des exercices axés exclusivement sur un mécanisme lui permettraient-ils d'atteindre le niveau où la notion peut être généralisée à n'importe quelle situation ?

Ceci nous amène à formuler un second postulat. Un plan d'études bien conçu devrait faire apparaître chaque année, sous une forme appropriée aussi bien à l'âge des élèves qu'à leur diversité de développement intellectuel, les notions mathématiques essentielles. Il semble en effet que seule, une approche cyclique des notions de base donnerait la possibilité de poursuite d'une progression harmonieuse aux sujets dont le rythme d'assimilation des notions est plus lent que la moyenne.

Parallèlement, les élèves doués pourraient aborder ainsi des notions plus difficiles et élargir leur champ d'expérience. Il est évident que ce postulat ne pourra être mis en application que lorsque le précédent, à savoir la diversification des tâches et des exigences à l'intérieur de la classe, aura été préalablement admis.

Dans le troisième graphique, qui présente les courbes des distributions de résultats des épreuves de mars et de juin, on relève une tendance différente en troisième et en quatrième année d'une part, en cinquième et en sixième année d'autre part. Dans les deux premiers degrés, nous obtenons une courbe déplacée vers la droite par rapport à la courbe "normale" du point de vue statistique.

Cela signifie que les tests contrôlent bien l'acquisition de certaines connaissances ayant fait l'objet d'un enseignement. En revanche, dans les deux degrés supérieurs, la courbe se rapproche de la distribution "normale". Il est probable que, en raison de l'augmentation du nombre des connaissances entrant en jeu, les épreuves se transforment en tests d'aptitudes plus qu'en épreuves de type scolaire. Cette observation tendrait à confirmer, sans la justifier à elle seule, l'idée que l'enseignement de la mathématique doit viser bien plus au développement d'aptitudes, à la construction du raisonnement logico-mathématique, qu'à la simple acquisition de connaissances.

Un problème reste à discuter. C'est celui de la tendance, assez marquée dans la plupart des cas, à la bimodalité des distributions. Ce phénomène semble provenir de la pondération des items. Les tests comprennent un nombre important de questions exigeant une réponse unique, cotée pour un point. En outre, chaque épreuve comporte quelques problèmes plus complexes, exigeant plusieurs actions. Comme un point a été attribué pour chacune des actions, l'item peut atteindre jusqu'à 3 points. Or un grand nombre de sujets ont échoué ou n'ont pas abordé ces problèmes. La bimodalité semble donc être due au fait que nous avons en réalité deux populations différentes entremêlées, d'une part celle qui réussit à résoudre les "problèmes" au sens qu'on a donné à ce mot dans l'enseignement traditionnel de l'arithmétique, et d'autre part, celle qui échoue à ces mêmes items.

En conclusion de cette analyse, il convient encore de s'interroger sur la signification des rendements moyens obtenus. En premier lieu, il existe une remarquable homogénéité pour les tests de septembre et de décembre. En septembre, le rendement moyen oscille entre 46 et 54 %. En décembre, il se situe entre 62 et 65 %. Dans les degrés respectifs, la marge de variation entre les trois épreuves trimestrielles s'accroît lorsque les sujets grandissent en âge : 1 % en troisième, 6 % en quatrième, 12 % en cinquième, 13 % en sixième. Cette progression paraît normale. Plus on monte dans les degrés, plus les élèves, en raison d'une assimilation antérieure insuffisante, ont de la peine à acquérir les notions prévues au programme.

D'une manière très grossière, et sans négliger ce qui a été relaté précédemment à propos de l'hétérogénéité des scores individuels, nous pouvons dire que, à la fin de l'année scolaire ou au début de l'année suivante, les élèves connaissent la moitié des notions figurant dans les tests. Cette connaissance s'élève aux deux tiers après un trimestre consacré à la révision du programme de l'année précédente. A

première vue, on pourrait considérer ce rendement comme satisfaisant, mais nous avons vu, au moment de l'analyse du test du dixième degré, à quoi conduisaient de tels résultats. Nous pouvons donc faire à ce propos deux déductions.

En premier lieu, le rendement moyen est trompeur car il est le reflet de situations individuelles fort disparates. En réalité, dans une classe de 30 élèves, 5 enfants au moins sont en présence de difficultés quasi-insurmontables, 10 élèves suivent l'enseignement avec peine, 10 élèves reçoivent un enseignement qui leur convient parfaitement et 5 élèves paraissent sous-alimentés du point de vue intellectuel.

En second lieu, il est bien difficile d'attacher une valeur intrinsèque à un rendement. L'intérêt des calculs de rendements se situe surtout au niveau des comparaisons. Toutes choses égales par ailleurs, le rendement d'un groupe ou d'une épreuve est supérieur à celui d'un autre groupe, respectivement d'une autre épreuve. Mais en valeur pure, le rendement moyen dépend toujours de la manière dont ont été choisis les items qui composent le test.

Si les objectifs d'un enseignement sont parfaitement délimités en termes de savoir-faire, la construction d'une épreuve vérifiant dans quelle mesure ces objectifs seront atteints est possible. Mais si, comme c'est le cas dans la plupart des systèmes scolaires, les programmes et les plans d'études se bornent à l'énumération d'un certain nombre de notions, le rendement dépendra toujours du choix des items effectué par le constructeur du test.

8.2 Analyse des items

L'analyse des items a été effectuée, pour chacune des 16 épreuves, sur l'ensemble des sujets composant l'échantillon, c'est-à-dire sur 480 à 550 sujets selon les cas. Ce qui frappe en premier lieu, c'est la sur-estimation constante des possibilités réelles de la majorité des élèves. Cette attitude s'explique assez bien si l'on tient compte du fait que les programmes ont été établis à une époque où quelques élèves par classe seulement avaient accès aux études secondaires. Il s'agissait, pour le maître primaire, de préparer le mieux possible les rares sujets doués qu'il enverrait au collège. Peu importait si la plus grande partie de la classe ne parvenait à tirer qu'un maigre profit de l'enseignement. Aujourd'hui, les choses ont changé du tout au tout. Non seulement, il

faut que la plupart des élèves entrent dans l'enseignement secondaire, mais le développement prévisible de l'éducation permanente n'autorise plus l'école à engager une partie des enfants dans une succession d'échecs dont les effets psychologiques deviendront vite irréversibles. Il faut que les exigences soient adaptées à la diversité de développement des sujets. Pour cela, l'enseignement doit avoir un caractère beaucoup plus large afin que, à propos du même thème, toute une gamme d'exercices de difficulté échelonnée soit à la disposition de la classe.

En second lieu, nous constatons que le travail portant sur une notion quelconque s'arrête, en moyenne, lorsque deux tiers des élèves semblent l'avoir comprise. Cet abandon prématuré, qui n'aurait probablement pas les mêmes conséquences dans d'autres disciplines, empêche l'enfant, en raison de la structure hiérarchique de la mathématique, d'aborder avec toutes les chances de succès les notions qui suivront. Il faudra donc, dans un plan d'études bien compris, que les notions essentielles réapparaissent de manière cyclique jusqu'à ce que toute la population scolaire les ait assimilées.

En troisième lieu, il convient de prendre conscience à la fois du rôle fondamental et de la difficulté de construction de la numération. Celle-ci demande non pas qu'on lui consacre quelques leçons au début de chaque année scolaire, mais bien qu'une très large place lui soit accordée dans le programme, car c'est dans la mesure où la numération sera bien comprise que l'enfant aura la possibilité de pénétrer aisément dans les domaines qui se rattachent au nombre, en particulier ceux des opérations arithmétiques et de la mesure.

En quatrième lieu, il s'agira de lutter contre la conception rigide et ponctuelle de l'enseignement afin de remplacer celle-ci par une approche à la fois souple et fortement structurée. Souple pour que l'enfant n'attache pas un seul mode de résolution à une situation donnée, mais qu'il soit entraîné à la découverte de plusieurs cheminements aboutissant au même résultat et au choix du plus économique, du plus élégant, du plus astucieux. Fortement structurée afin que l'enfant ne perçoive pas les algorithmes comme autant d'entités cloisonnées mais qu'il soit habitué, dès que faire se peut, à établir des liaisons solides entre eux.

En cinquième lieu, nous relèverons la sûreté insuffisante dans la technique des opérations arithmétiques et la méconnaissance des propriétés de ces opérations.

Il semble que l'accent principal devrait être mis sur les propriétés bien plus que sur un entraînement de type répétitif dans lequel l'enfant effectue des dizaines, voire des centaines d'additions ou de multiplications. En effet, ou bien ces nombreux exercices sont inutiles parce que l'enfant sait trouver le résultat de l'opération et il existe alors d'autres moyens plus valables pour l'acquisition des tables d'addition et de multiplication, ou bien l'enfant ne comprend pas complètement le sens de l'opération, ce qui rend les exercices de répétition sans effet. La construction des opérations arithmétiques devrait se faire à partir de situations très variées dans lesquelles l'enfant pourrait dégager progressivement les propriétés de ces opérations. La technique n'interviendrait qu'en tout dernier lieu, comme une possibilité d'accélérer le calcul.

En sixième lieu, ce que l'enseignement traditionnel désigne sous le nom de "problème" doit être complètement repensé. Les exercices présentés constituent, dans la plupart des cas, un faux concret sur lequel l'enfant n'a pas la possibilité de s'appuyer. Si nous prenons, par exemple, le calcul du prix d'achat lorsqu'on connaît le prix de vente et la perte, il est bien évident que nous avons là un problème exclusivement scolaire et que jamais, dans la pratique commerciale, cette situation ne se rencontrera. De plus, ce n'est en général pas le type de raisonnement logico-mathématique impliqué dans le problème qui forme l'ossature de l'enseignement mais bien son contenu sémantique. Ainsi, nous trouvons dans un chapitre le calcul du prix d'un certain nombre de kilos, dans un autre chapitre sans lien avec le précédent le calcul du nombre de kilomètres parcourus en fonction du temps, dans un autre encore la relation entre la masse et le poids d'un liquide. A aucun moment n'est véritablement dégagée la loi mathématique sous-jacente à l'ensemble de ces données. De plus, les problèmes d'une même série constituent généralement autant de situations particulières sans lien entre elles. Prenons pour illustrer notre pensée, un exemple concret. Nous avons relevé combien les enfants éprouvent de la difficulté à calculer le prix d'une quantité donnée lorsque celle-ci est inférieure à l'unité. Il est certain que si au lieu de trouver dix problèmes avec des contenus différents l'élève était conduit à faire varier une seule donnée à la fois, à calculer le prix de 10 kg, puis de 5, puis de 2, puis de 1, puis de 0,5 etc., alors que le prix de l'unité reste constant, il en tirerait un plus grand bénéfice.

UNE REFORME INDISPENSABLE

9. LES BASES D'UNE REFORME

9.1 Une pédagogie adaptée à notre temps

C'est avec une intention délibérée que nous aborderons la question d'une réforme de l'enseignement par le biais de la pédagogie. Nous n'allons pas nier, bien entendu, toute l'importance de la profonde mutation qu'ont subie les mathématiques dans les vingt dernières années. Mais, si nous nous plaçons dans la perspective d'une scolarité obligatoire destinée à tous les élèves et non aux futurs mathématiciens seulement, la psychopédagogie de l'enseignement importe plus que le contenu mathématique proprement dit pour autant que celui-ci comprenne les notions les plus fondamentales. En revanche, même un bouleversement complet du contenu des programmes n'aurait qu'un effet fort limité s'il ne s'accompagnait pas d'une remise en question totale des intentions et des procédés pédagogiques.

Dans la plupart des écoles de notre pays, la pédagogie tire encore sa source des principes émis par Herbart au siècle dernier. Selon ce pédagogue, une leçon comprend quatre temps : la présentation, la comparaison, la généralisation, l'application. La présentation a pour but de mettre l'élève en appétit, de faire naître l'intérêt par l'observation ou par la narration du maître. La comparaison permet de faire ressortir les éléments intéressants d'une situation. Elle se conclut par la généralisation ou mise en évidence d'une règle, d'un principe, d'une loi. Ensuite, l'application consiste à multiplier les exercices dans lesquelles l'élève devra appliquer cette règle.

Il faut reconnaître que les principes d'Herbart, bien appliqués, pouvaient avoir une certaine valeur dans un temps où l'école détenait le monopole de l'information intellectuelle. Le maître possédait le savoir et le dispensait à ses élèves. Ceux-ci n'avaient guère d'autre source à laquelle puiser la connaissance. Dans la civilisation actuelle, l'école ne procure qu'une partie réduite de l'ensemble des informations absorbées par l'enfant. L'environnement social, les jeux et les jouets, la télévision, la radio, les journaux pour enfants font une con-

currence sérieuse à l'école qui se trouve en état d'infériorité sur le plan du caractère attrayant de la présentation des informations. Le rôle du maître sera donc bien plus d'utiliser les informations glanées par ailleurs d'une manière désordonnée, pour les structurer, pour les préciser, pour leur donner un caractère opératoire.

D'un autre côté, nous devons avouer que, dans la réalité du travail quotidien de la classe, les deux premières étapes selon Herbart sont trop souvent escamotées. Aidé en cela par des manuels qui présentent généralement la règle d'une manière très condensée, le maître, croyant à tort gagner du temps et de l'efficacité, n'accorde pas suffisamment d'importance à l'observation de situations variées, à la recherche, aux tâtonnements, aux essais et aux erreurs, aux comparaisons. De cette manière, la règle n'est pas découverte par l'élève mais elle est donnée trop vite et de manière trop schématique par le maître qui empêche de cette façon une vraie maturation suivie d'une intériorisation durable. Même si par la suite, les exercices d'application sont nombreux, ceux-ci ne peuvent avoir leur pleine efficacité car l'absence d'une lente approche de la règle, le fait qu'elle soit donnée de l'extérieur, fait que l'enfant recourt plus à la mémoire qu'à la compréhension véritable. De ce fait, la partie la plus importante de la leçon, celle dans laquelle l'enfant observe, analyse, compare, déduit, vérifie, disparaît presque complètement. Nous trouvons même des classes où, sous prétexte d'une individualisation mal comprise, chaque élève effectue à son rythme les innombrables exercices figurant dans le manuel, la part du maître étant réduite à une simple correction.

La formation et le développement du raisonnement logico-mathématique ne peuvent se satisfaire de telles pratiques qui, à la limite, conduisent l'élève à apprendre malgré l'école - parce que la famille en pallie les insuffisances - et non grâce à elle. Il y a inévitablement, derrière les outrances des caricaturistes, un fond de vérité.

Et nous soucrivons à la critique de J. Piaget (34) :

"La vie psychique entière consiste pour lui (Herbart) en une sorte de mécanisme des représentations, qui supprime l'intelligence en tant qu'activité, au profit d'une statique et d'une dynamique des idées comme telles, et qui dérive en dernier ressort de la tendance de l'âme à se conserver elle-même; dès lors, le problème pédagogique est de savoir comment présenter les matières pour qu'elles soient assimilées et retenues : le processus de l'aperception qui permet de ramener l'inconnu au connu fournit la clef du système... Or Herbart a-t-il transformé l'école ? Non... Pourquoi ? C'est que sa psychologie est essentiellement une doctrine de la récep-

tivité et des éléments de conservation que comporte l'esprit. Herbart n'a pas su élaborer une théorie de l'activité en conciliant le point de vue biologique du développement avec l'analyse de cette construction continue qu'est l'intelligence".

Notre ambition d'amener chaque individu au maximum de ses possibilités nous contraint à rejeter le modèle herbartien dans lequel c'est le maître qui est l'acteur principal. Nous rejetterons de même le principe qui en est découlé par déformation et qui consiste à donner la primauté au programme sur les capacités des élèves. Le programme doit donner un cadre général guidant l'action du maître. Il n'est pas admissible, en mathématique surtout, qu'une partie des enfants passe à une notion nouvelle sans avoir assimilé la précédente sous le simple prétexte que le moment est venu d'aborder, selon le programme, un nouveau chapitre.

A l'opposé du modèle herbartien, nous trouvons l'école nouvelle dans laquelle toute l'action éducative est centrée sur l'enfant.

Contrairement au point de vue selon lequel l'enfant est un être essentiellement réceptif, l'école nouvelle réagit en affirmant le rôle primordial de l'activité. Les différentes formes qu'a prises l'éducation nouvelle sont trop connues pour que nous nous y arrêtions. Nous nous bornerons simplement à en rappeler les grands principes relatifs à l'éducation intellectuelle. L'éducation nouvelle développe le jugement plus que la mémoire, vise à la culture générale. Elle s'appuie sur l'activité personnelle de l'élève. L'enseignement est basé sur l'intérêt spontané de l'enfant.

Ce mouvement nous conduira, avec les adeptes de Freinet, à la méthode de tâtonnement expérimental et à un calcul dit vivant dans lequel les thèmes d'études sont proposés par les enfants eux-mêmes.

Sur un plan théorique, les principes de l'éducation nouvelle peuvent difficilement être réfutés mais il faut bien reconnaître que leur passage dans la pratique scolaire est resté fort limité. Sans doute, les tenants de cette conception ont-ils beau jeu de critiquer le système scolaire et de rejeter sur les programmes démentiels, les examens et les contraintes de tous ordres, le fait que l'éducation nouvelle ne soit guère répandue.

Cependant, au-delà des querelles d'écoles, deux problèmes nous préoccupent. Le premier tient à la qualité du corps enseignant. Il est évident que plus l'enseignement est souple, large, sans contrainte, plus les programmes sont laissés à la libre appréciation du maître, plus la tâche de l'enseignant est ardue. Il y aura toujours des maîtres brillants, dotés d'une vaste culture, qui parviendront à faire merveille dans un tel type d'éducation. Mais il est indéniable que l'extension limitée de l'éducation nouvelle provient en partie du fait que l'instituteur moyen, conscient de ses possibilités et de ses limites, ne se sent pas apte, souvent, à s'engager dans une telle voie et demande à l'autorité scolaire de lui fournir des directives précises quant aux programmes à réaliser et aux objectifs à atteindre.

Le second problème est lié à l'influence du milieu. Nous ne pouvons nous empêcher de craindre, si le recours au seul intérêt spontané de l'enfant est érigé en règle absolue, que le milieu socio-culturel du groupe qui constitue la classe ainsi que la qualité des individualités qui la composent, ne jouent un rôle important dans la diversité des intérêts et dans le choix des activités. Dans les régions peu favorisées, si le maître ne dépasse pas le plan des activités spontanées de la classe, celles-ci risquent de rester dans un champ inférieur à celui auquel elle pourrait réellement prétendre. La démocratisation des études exige que l'école prenne en charge l'inégalité sociale et place chaque enfant dans les meilleures conditions de développement, comme elle implique que tout individu développe aussi largement que possible ses capacités virtuelles.

La transformation nécessaire de l'enseignement de la mathématique doit à la fois respecter autant que faire se peut les principes relatifs à l'activité et à l'intérêt spontanés des enfants, fournir à ceux-ci un champ d'expérience très vaste et très diversifié, tenir compte des aptitudes et des habitudes du corps enseignant, des contraintes imposées par le système scolaire et par la société dans lequel il est implanté. S'il n'était question que de définir la pédagogie d'une école pilote, nous jouirions d'une liberté beaucoup plus large; mais notre ambition est plus grande car elle vise à réformer, dans le cadre des institutions existantes, la pédagogie de toutes les écoles publiques.

Le développement du raisonnement logico-mathématique exige de la part de l'enfant une intense activité. Il faut que l'élève ait la possibilité d'agir, d'essayer, de tâtonner, de se tromper, de vérifier ses hypothèses par l'expérience, de corriger ses erreurs avant de dégager une loi générale. Ce ne sont pas les exercices d'application qui auront la plus grande place mais bien la recherche et le tâtonnement, au cours desquels le sujet est amené à agir dans des situations fort diverses

pour en découvrir peu à peu les isomorphismes et en dégager les constantes. Ensuite, la loi générale sous-jacente devra s'imposer par l'évidence et les exercices d'application ou de consolidation n'auront plus qu'une importance secondaire. Dans cette optique, le rôle du maître est profondément modifié. Il n'est plus celui qui détient la vérité, qui la dispense par petites tranches et qui affirme que le travail de l'enfant est juste ou faux. Sa nouvelle tâche consiste avant tout à choisir les situations que l'enfant sera amené à explorer, à guider celui-ci dans son activité en lui suggérant des voies d'approche, en lui proposant des vérifications, en le faisant prendre conscience des contradictions internes dans une situation donnée.

Une autre modification très profonde de la pédagogie paraît inéluctable : c'est celle qui consiste en l'abandon d'une pédagogie dans laquelle, contrairement à ce qui se passe dans le monde professionnel, l'enfant est toujours seul lorsqu'il est confronté à un problème.

Cette manière de faire devra être remplacée par une ambiance de classe plus ouverte, faite d'une collaboration franche entre les élèves, dans laquelle la discussion, la confrontation des points de vue, la réfutation des arguments constitueront un levier très puissant pour l'assimilation des connaissances. Le développement du raisonnement logico-mathématique ne peut que gagner dans l'obligation qu'aura l'enfant à prendre en considération, non pas ce que dit le maître nanti de l'autorité et du savoir par fonction, mais le point de vue de son camarade qui, situé sur un pied d'égalité, lui donnera l'occasion de préciser sa pensée, de défendre sa position, de trouver des arguments irréfutables.

Nous vivons dans une société qui, par l'élévation générale du niveau de vie, par le développement de la technique, ne rend plus aussi nécessaire que par le passé la mise en commun des énergies et des compétences pour la survie du groupe. La coupure entre la famille et l'activité professionnelle du père ne fournit plus autant que par le passé les occasions propices à une prise de conscience par l'enfant de la richesse et de l'importance des interactions sociales dans le monde du travail. Trop longtemps, l'école a contraint les élèves à un travail individuel dans lequel toute forme de collaboration est honnie. Trop longtemps, elle a maintenu un esprit de compétition stérile par le système des classements et des prix. Il est absolument nécessaire, si l'école se veut une préparation à la vie, que l'accent soit mis sur le travail de groupe, sur la collaboration entre élèves, sur l'instauration d'un système de relations sociales propre à favoriser la communication.

L'école a eu, et a encore un caractère sélectif très marqué. De ce fait, il faut que les élèves fassent l'objet d'un classement et reçoivent des appréciations, en général sous forme chiffrée. Tout bon maître, perpétuant ainsi la conception qui régnait à l'origine de l'école publique, estime que les notes élevées doivent être rares, qu'elles récompenseront un travail particulièrement brillant, qu'elles doivent être dispensées avec parcimonie car elles engendrent la paresse. En revanche, il est admis communément que l'attribution de mauvaises notes a un effet salutaire. Celles-ci montrent à l'élève ses insuffisances. La sanction de la famille s'ajoute parfois à celle de l'école. L'ensemble conduit l'enfant à des réflexions qui le pousseront à travailler davantage. Or, rien n'est plus faux. Tout d'abord, il faut prendre conscience que la situation d'une partie des élèves est désespérée. Les choses sont jouées dès la première semaine, lorsque la hiérarchie s'établit dans la classe. Dès ce moment, les efforts de l'enseignant vont amener tous les enfants à franchir des paliers successifs, mais la position des élèves les uns par rapport aux autres restera pratiquement la même. On connaît trop les effets d'un jugement négatif pour ne pas savoir à quel point il va empêcher un développement harmonieux de l'enfant. Il faut, même au prix de révisions qui seront peut-être déchirantes, modifier complètement notre conception des sanctions du travail scolaire. L'important, c'est la sécurisation de l'enfant qui ne devrait pas avoir comme objectif un but qu'il sait consciemment ou inconsciemment, inaccessible à jamais, mais qui devrait éprouver, aussi souvent que faire se peut, le sentiment d'avoir réussi, quitte à ce que le niveau de réussite soit en accord avec le niveau d'aptitudes de l'élève et se traduise par des orientations différentes au sortir de l'école primaire.

Cette idée est peut-être irréalisable dans un proche avenir en ce qu'elle touche à l'ensemble du système scolaire, et non au seul enseignement de la mathématique.

Néanmoins, sans prendre une position révolutionnaire, il est possible d'améliorer grandement la situation dans le domaine qui nous concerne. Tout d'abord, il s'agit de définir des objectifs qui soient réellement à la portée des élèves. Il faut ensuite que les travaux de contrôle individuels restent régulièrement d'une difficulté nettement inférieure à celle des exercices qui sont proposés dans le cadre des activités de groupe ou des exercices collectifs. Il faut enfin, dans toutes les situations proposées aux enfants, que celles-ci soient assez larges pour que chacun, même le moins doué, ait la possibilité de réaliser quelque chose et d'en contrôler l'exactitude, le succès engendre le succès; c'est dans la mesure où l'enfant aura réussi qu'il pourra entreprendre l'étape suivante dans de bonnes conditions.

Il est une autre dimension qui, jusqu'ici, n'a pas toujours été contrôlée d'une manière suffisante. C'est celle du temps imparti à la mathématique. Depuis longtemps, d'éminents pédagogues prétendent que les esprits enfantins sont sous-alimentés et que de jeunes enfants sont capables de performances bien plus élevées que celles qui leur sont demandées. Nous croyons avoir démontré que, sur une large échelle, l'enseignement de type classique n'a peut-être pas trouvé les meilleures voies mais qu'il est loin d'avoir, avec les moyens qui lui étaient propres, sous-estimé les capacités des élèves. En élaborant une réforme, il conviendra de ne pas céder à l'enthousiasme des pionniers, mais de tenir compte du nombre réel des heures dont on dispose dans le cadre d'un programme général harmonieusement structuré.

9.2 Les expériences étrangères

L'introduction des mathématiques modernes dans l'enseignement secondaire s'est, au cours des vingt dernières années, étendue à un grand nombre de pays. L'intérêt de l'école primaire pour cette mathématique nouvelle est plus récent. Les expériences les plus connues ont pris corps entre 1960 et 1965. La tentative de rénovation genevoise s'est appuyée principalement, en ses débuts, sur les travaux de Z.P. Dienes, à Adelaïde puis à Sheerbroke, et de N. Picard à Paris. Peu après, d'autres informations ont été fournies par le Nuffield Mathematics Project, le Minnesota Mathematics and Science Teaching Project, les travaux de F. Papy en Belgique. Plus récemment, les compte-rendus d'expériences et les ouvrages publiés sont devenus si nombreux, et leurs recoupements si fréquents, que nous renoncerons à les mentionner.

Au cours des premières années d'essais, nous nous sommes rendu compte qu'un projet de réforme axé dans la ligne d'un seul des auteurs précités pouvait difficilement entrer en ligne de compte. D'une part, aucun d'entre eux ne justifiait d'une expérience dépassant les limites d'un petit groupe expérimental; les problèmes posés par la généralisation du nouvel enseignement à toute une population scolaire n'avaient pas été abordés à notre connaissance. D'autre part, il convenait de tenir compte des conditions locales concernant le système scolaire, la formation des maîtres, le milieu social. En outre, notre expérience devait se conformer, au moins dans ses grandes lignes, à un projet de programme en cours d'élaboration pour l'ensemble de la Suisse romande. Il aurait été inutile de se lancer dans une voie qui se serait par trop écartée de ce que nous pouvions raisonnablement faire admettre aux autorités scolaires de la partie fran-

gaise du pays. Certes, le chercheur souhaite toujours subir le moins de contraintes possible afin de conduire l'étude à sa guise. Le souci d'efficacité et le désir de voir passer dans la réalité scolaire les fruits de notre expérience l'ont largement emporté sur une liberté académique séduisante, mais comportant le risque que nos travaux ne dépassent jamais les limites d'un groupe expérimental restreint.

Z. P. DIENES

L'oeuvre de ZP Dienes est très riche. Elle contient une foule d'idées concernant les activités mathématiques qui peuvent être proposées aux enfants. Voici comment Dienes définit les exigences fondamentales de l'étude des mathématiques.

- " a) Les auteurs des programmes devront avoir conscience de l'unité de la structure mathématique. Le cours des expériences mathématiques devra être considéré comme un tout, de l'âge de cinq ans aux niveaux supérieurs, et tenir le plus grand compte des processus mathématiques, logiques et psychologiques mis en cause.
- b) Il devra y avoir une grande variété d'expériences mathématiques à partir desquelles les concepts mathématiques puissent être construits par les enfants eux-mêmes et individuellement. Plusieurs expériences seront nécessaires pour chaque concept; autrement il n'y aura qu'association et non généralisation.
- c) Le maître chargé de l'enseignement devra être conscient de la dynamique générale du processus d'apprentissage aussi bien que du niveau particulier atteint par chaque enfant. Il devra être attentif aux différences individuelles dans les manières d'apprendre, il devra surtout avoir conscience du potentiel émotionnel très délicat d'une situation d'étude réellement créatrice et par conséquent de la possibilité pour lui de favoriser ou de gêner le processus d'apprentissage dans une telle situation." (35)

Cet auteur met en cause, dans l'échec de l'enseignement des mathématiques, le principe de la leçon magistrale, la motivation artificielle du système des punitions et des récompenses, le fait que l'on néglige les différences individuelles dans la manière de former les concepts. Il préconise des méthodes dans lesquelles l'enfant puisse se livrer à des expériences variées, les unes portant sur des situations réelles, d'autres s'appuyant sur des matériels créés pour les besoins de la cause et il précise :

"Il sera probablement nécessaire d'abolir complètement la méthode actuelle d'enseignement en classe, dans laquelle le professeur pontifie d'une position centrale de puissance, et de la remplacer par l'apprentissage individuel ou par petits groupes, à partir d'un matériel concret et d'instructions écrites, le maître agissant comme guide et comme conseiller. Le matériel et les devoirs devront être adaptés aux étapes par lesquelles passeront les enfants et le maître devra apprendre à être sensible aux exigences d'une situation toujours changeante." (36)

Dans un autre ouvrage, Dienes définit sa conception du processus d'apprentissage en mathématique. Il distingue six étapes :

La première étape consiste à laisser l'enfant jouer librement dans un milieu qui est enrichi par la présence de jeux comportant une structure sous-jacente.

Après une période d'adaptation, l'enfant se rendra compte que la situation comporte des contraintes. Il ne peut pas faire telle ou telle chose. La deuxième étape consistera à jouer avec des restrictions qui lui seront artificiellement imposées : des règles du jeu. Dans une troisième étape, l'enfant sera mis en présence de jeux différents recouvrant la même structure mathématique. La mise en évidence des isomorphismes lui fera faire un pas en avant vers l'abstraction. La quatrième étape est celle du passage à la représentation :

"Avant de prendre pleinement conscience d'une abstraction, l'enfant a besoin d'un processus de représentation. Une telle représentation lui permettra de parler de ce qu'il a abstrait, de le regarder du dehors, de sortir du jeu, ou de l'ensemble des jeux, d'examiner les jeux et de réfléchir à leur sujet. Une telle représentation peut être un ensemble de graphes, elle peut être un système cartésien, elle peut être un diagramme de Venn, ou tout autre représentation visuelle ou même auditive dans le cas des enfants qui ne pensent pas essentiellement d'une manière visuelle." (37)

On voit que l'auteur dépasse les limites de la seule représentation graphique. Pour notre part, nous attacherons une très grande importance à la représentation verbale des situations présentées dans les jeux. Celle-ci favorise le processus de socialisation de l'enfant, développe la capacité de communication avec autrui et conduit progressivement l'enfant à l'emploi d'un langage sans ambiguïté. La description verbale constitue la cinquième étape chez Dienes. Elle suit donc les autres types de représentations. Nous ne sommes pas certains que cet ordre doive toujours être le même. Souvent, il nous a paru utile de faire passer la représentation verbale avant le graphisme.

En effet, dans une représentation graphique, il arrive que l'enfant, par imitation de ses camarades ou par intuition, fournisse une réponse correcte sans bien en connaître le pourquoi. Le recours à la verbalisation et à la représentation graphique simultanément ou le libre choix, selon les cas, de la priorité de l'un sur l'autre semble favoriser la construction de la pensée.

En revanche, nous soucrivons entièrement au point de vue selon lequel ce sont les enfants qui inventeront leur propre langage, qui proposeront leurs propres représentations, le choix d'un langage et de représentations communs constituant un palier vers l'utilisation des modèles conventionnels dont l'introduction ne doit pas précéder la compréhension profonde de la situation envisagée.

La sixième et dernière étape conduit à la construction d'un système formel dans lequel il y a des axiomes et des règles du jeu.

L'imagination très fertile de Dienes lui a permis de publier un nombre considérable d'ouvrages dans lesquels la description pratique de jeux logiques et mathématiques prennent la plus grande place.

L'un des éléments révolutionnaire de sa conception de l'enseignement des mathématiques est sans contredit l'accent mis sur la construction de structures logiques qualitatives préalablement à l'approche des activités à support numérique. Le pédagogue rejoint ici le point de vue défendu depuis longtemps par Piaget. Cependant, le grand psychologue genevois émet cette critique :

" Il y a donc un grand avenir à prévoir dans la collaboration des psychologues et mathématiciens pour l'élaboration d'un enseignement "moderne" et non pas traditionnel des mathématiques du même nom, et qui consisterait à parler à l'enfant son langage avant de lui en imposer un autre tout fait et trop abstrait, et surtout à conduire l'enfant à réinventer ce dont il est capable au lieu de se borner à écouter et à répéter. Le pédagogue mathématicien Dienes a fait des efforts louables dans ce sens mais une insuffisante information psychologique rend parfois un peu optimiste l'interprétation qu'il donne de certains "jeux" ou exercices qu'il a imaginés." (38)

La remarque du psychologue roumain Fischbein paraît également fort pertinente :

" La technique de Dienes soulève à mon avis, deux problèmes essentiels :

- (1) Sommes-nous toujours sûrs que le jeu est, pour les enfants, le porteur effectif de la structure mathématique envisagée par le maître ? N'y a-t-il pas là le risque d'une erreur de perspective ? Est-ce qu'on ne risque pas une contamination ou même une restructuration totale déterminée par le système conceptuel (ou mieux, intuitif-conceptuel) de l'enfant ?
- (2) N'y a-t-il pas le risque qu'en projetant des jeux didactiques pour enseigner certains concepts (systèmes numériques, structures algébriques etc..) on tienne compte (en ce qui concerne l'ordre et la systématisation des concepts enseignés) plutôt de la logique des jeux que de la logique de l'édifice mathématique ?

Ces réserves n'expriment pas du tout un désaccord avec les idées du professeur Dienes. Nous désirons seulement rappeler la complexité des phénomènes et suggérer la nécessité d'expérimenter sur un front très étendu pour pouvoir dégager une ligne de conduite ferme." (39)

Nonobstant ces remarques, notre expérience s'est très largement inspirée de l'oeuvre de Dienes. En particulier, l'introduction des blocs logiques et l'utilisation dans la première phase de l'expérience de trois de ses volumes (40) mis à la disposition du groupe expérimental ont conditionné fortement nos travaux d'approche.

Cependant, il est apparu assez rapidement que, sans rejeter les grandes lignes et les principes de bases de Dienes, une adaptation à nos propres besoins s'avérerait nécessaire. Outre les critiques de Fischbein et de Piaget, nous relèverons quatre sources de difficultés.

En premier lieu, le recours, dans l'apprentissage de la logique, à un symbolisme trop poussé risque de faire revenir le maître à un enseignement du type traditionnel. L'enfant qui manipule des écritures du type "KKBNGR" tend plus à plaquer une étiquette en liaison avec le jeu des blocs logiques qu'à construire une logique valable en toutes situations. Nous avons déjà mentionné l'importance que nous attachons à la verbalisation des situations. Nous y ajouterons la nécessité absolue de faire varier constamment le support matériel sur lequel doit s'exercer la logique. Dienes lui-même relève à plusieurs reprises le besoin de varier les matériels mais ses ouvrages sont conçus de telle sorte que, mis entre les mains des maîtres, ceux-ci ont tendance à ne plus jurer que par les blocs logiques et le matériel multibase.

En second lieu, l'abondance même des ouvrages et la richesse de leur contenu permettent difficilement à un instituteur, aux prises avec tous les problèmes d'un enseignement général, d'en dégager l'essence, de faire un choix et d'élaborer une progression harmonieuse entre les différents concepts que sont la logique, l'idée de relation, les notions ensemblistes, l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie. Très souvent, la réaction des maîtres engagés dans l'expérience a été de nous demander des précisions quant à la répartition du temps entre les différentes activités et la hiérarchie à établir dans l'approche des notions. En effet, si la lecture permet aisément de dégager la structure interne à l'un des chapitres, il est difficile à une personne non informée de déterminer à quel moment il faut passer de l'acquisition d'une donnée logique à la notion correspondante en calcul numérique ou algébrique.

En troisième lieu, Dienes ne définit aucun programme au sens où l'entend l'organisation scolaire et l'importance de sa production n'est pas compatible avec le temps dont dispose le maître pour enseigner la mathématique. Il faut donc effectuer un choix qui demande des connaissances mathématiques et psychologiques dépassant celles que l'on est en droit d'attendre d'un enseignant primaire.

En quatrième lieu, Dienes, en mathématicien, n'attache guère d'importance à certaines notions qui, à tort ou à raison, sont estimées nécessaires par la société dans laquelle est intégrée l'école genevoise. Nous voulons parler en particulier de l'acquisition des tables d'additions et de multiplications, de la technique des opérations arithmétiques, des applications de la mathématique aux questions de budget familial, etc...

Enfin, notre réticence à une adhésion inconditionnelle est renforcée par le fait que, à notre connaissance, ses travaux n'ont guère débordé le cadre de quelques écoles expérimentales et que nous ne connaissons pas de région où un système scolaire public ait adopté sa conception d'une manière généralisée.

Nicole Picard

La seconde source d'information qui a nourri notre réflexion est constituée par l'oeuvre entreprise depuis 1964 par Nicole Picard dans la région parisienne. Outre ses publications, un cours donné par elle à Genève en 1965, une série d'émissions télévisées plus récentes, la visite de plusieurs écoles françaises travaillant sous sa conduite ou s'inspirant de ses travaux, nous ont fourni une bonne connaissance de

sa méthode. C'est d'un rapport rédigé à l'intention d'une rencontre organisée par l'UNESCO à Hambourg que nous extrairons les grandes lignes de cette méthode. (41)

Les fondements psychopédagogiques dérivent à la fois des principes de la méthode de Dienes et de l'utilisation des "représentations". (Notons que la notion de représentation apparaît chez Dienes dans l'ouvrage cité "Les six étapes du processus d'apprentissage", publié en 1970).

Les représentations, selon N. Picard, précèdent la symbolisation. L'auteur considère le terme de représentation au sens du mathématicien : emploi de graphes, de diagrammes, de schémas. D'après son expérience, la représentation mentale au sens que lui donne la psychologie génétique est facilitée si l'enfant dispose d'un support visuel. En traduisant les parties d'une structure abstraite sous forme de représentations graphiques, un modèle sensible de la structure est obtenu. De là, deux ensembles peuvent être reconnus comme ayant la même structure.

N. Picard estime que, du point de vue pédagogique, la représentation graphique est très utile car l'expression au moyen de graphes, de diagrammes ou de schémas, donne aux enfants une possibilité qu'ils n'ont pas encore sur le plan verbal.

Les bases mathématiques de cette méthode sont constituées par la théorie des ensembles, de laquelle le concept de nombre peut être abstrait, et la théorie des relations. Les ouvrages pratiques de N. Picard sont intéressants à plus d'un titre. Tout d'abord, leur lecture est aisée et ils peuvent être mis aisément entre les mains des enseignants. En outre, ils présentent un ensemble de jeux et d'exercices formant un tout et donnent par là une ligne de conduite claire aux maîtres. Néanmoins, comme pour Dienes, il ne paraît pas possible d'adapter telle quelle la méthode de N. Picard.

En premier lieu, elle n'échappe pas entièrement au caractère intellectualiste de l'école française et, si le travail proposé dans les premières classes fait un large appel à l'expérience personnelle, il semble que les documents rédigés à l'intention du cours moyen ne lui accordent plus une très grande place.

En second lieu, les activités portant sur les notions d'ensembles, de relations, de structures paraissent excellentes mais la construction

des opérations arithmétiques semble brûler des étapes. Nous ne voyons guère comment les maîtres appliquant cette méthode pourront échapper, à certains moments, à l'imposition extérieure de la manière de faire ou de la règle à appliquer.

En troisième lieu, notre propre expérience nous fait douter de la priorité de l'expression graphique sur la représentation intériorisée et sur la verbalisation de la situation. Certes, l'enfant peut effectuer des représentations au moyen de graphes ou de diagrammes avant d'être en mesure de fournir une description verbale claire de la situation mais, dans de nombreux cas, nous avons vu que la représentation n'était rien d'autre qu'une "photographie" de la situation jouée. Très souvent, nous avons rencontré des sujets capables de résoudre un problème simple sous une forme verbale, qui en donnaient une représentation graphique complètement fautive. Le passage par la verbalisation ralentit fortement la progression, cela est certain, mais l'accélération de l'apprentissage par le recours aux représentations non accompagnées de leur description verbale nous paraît illusoire, voire dangereuse.

Nous emprunterons donc principalement à N. Picard les jeux logiques préparatoires à la construction de la notion d'ensemble, les exercices sur la construction du nombre, de la notion de produit cartésien, de la mesure. Mais nous accorderons la première place, dans son oeuvre, aux jeux et aux exercices conduisant à la construction de la structure de groupe, car c'est dans ce domaine qu'elle a, à notre point de vue, apporté la contribution la plus originale et la plus solide.

Frédérique Papy

On a souvent opposé, parfois de manière virulente, l'école Papy à d'autres écoles mathématiques. Nous ne nous prononcerons pas sur ce qu'il peut en être dans l'enseignement du premier ou du second degré. En revanche, au niveau de l'école primaire, l'oeuvre de F. Papy apparaît plus complémentaire qu'opposée à celles de Dienes ou de N. Picard.

Indiscutablement, F. Papy a poussé à l'extrême limite l'exploitation de l'idée de relation et l'utilisation des représentations fléchées multicolores. Nous relèverons aussi son point de vue sur le climat qui doit régner dans la classe :

" Les leçons se déroulent dans un climat affectif et psychologique positif. Dans le cadre de l'enseignement collectif, on évite de

comparer les enfants. Chacun d'eux est regardé comme individu à part entière, ne se comparant qu'à lui-même, heureux de ses progrès, qu'ils soient rapides ou lents.

Les travaux des élèves ne sont ni corrigés, ni cotés, pour éviter le choc psychologique inhibiteur que provoque la confrontation explicite de l'enfant avec ses fautes. A partir de l'examen détaillé des documents produits par les élèves, on crée des situations pédagogiques nouvelles qui leur font éviter les erreurs passées, dans un climat optimiste." (42)

Dans cette méthode, la priorité est indiscutablement donnée au domaine numérique. La plus grande partie des travaux suggérant à l'enfant la création de diagrammes fléchés ont le nombre pour support. L'une des caractéristiques de ce type d'enseignement est la très grande liberté laissée aux enfants dans le choix des nombres à propos desquels ils vont exprimer une idée.

Le nombre restreint de documents publiés jusqu'ici par F. Papy ne permet pas d'avoir une vue de sa conception de l'enseignement s'étendant sur tout le cycle primaire. En outre, du point de vue mathématique, son champ d'action paraît moins vaste que celui dans lequel se meuvent Dienes et N. Picard. Cependant, à la lecture des documents publiés, nous ressentons un sentiment de malaise. La réussite des élèves et l'âge précoce auxquels sont abordées les notions mathématiques nous laissent pantois. Toutefois, nos propres insuffisances - car notre groupe expérimental aborde les notions numériques avec au moins deux ans de retard par rapport aux élèves de F. Papy - sont moins criantes lorsqu'on connaît dans quelles conditions se donne l'enseignement :

" L'expérience pédagogique... s'est déroulée dans une classe non sélectionnée d'enfants de six ans...

... Les institutrices titulaires... présentes lors des cours de mathématique, ont suivi l'expérience avec intérêt et sympathie et ont largement contribué à la parfaite intégration de nos leçons dans le reste de l'enseignement.

... Au début de l'année, j'ai conduit une classe de 29 élèves. A partir du 15 octobre, pour des raisons administratives indépendantes de notre volonté, la composition des classes a été remaniée et j'ai poursuivi l'expérience dans une classe réduite à 19 élèves..." (43)

Il convient de louer la parfaite honnêteté intellectuelle de l'auteur, mais on conviendra que les conditions très particulières de l'expé-

rience ne permettent pas d'envisager sans autre sa généralisation. Ce n'est pas demain que des spécialistes de la compétence de F. Papy viendront prendre la relève de toutes les institutrices à l'heure de mathématique.

Nous pourrions donc tirer profit de l'expérience belge mais nous serons contraints de reprendre certains de ses essais dans les conditions normales de l'école primaire. Au cours de ceux-ci, il conviendra de veiller à ce que, par méconnaissance de la pensée de Papy, la perspective dans laquelle sont utilisées les représentations sagittales multicolores ne soit pas déformée. En effet, celles-ci ont deux niveaux de signification différents selon que l'on se place du point de vue de l'adulte ou du point de vue de l'enfant. Pour l'adulte qui domine le caractère abstrait d'un concept, la représentation graphique constitue l'image d'une abstraction déjà élaborée. Pour l'enfant, en revanche, la représentation est sensée être une étape intermédiaire entre la matériel concret et l'abstraction.

Dans l'enseignement de type classique aussi, le recours au graphique pour faciliter la résolution d'un problème était fréquent. Trop souvent cependant, bien que, du point de vue perceptif, l'image soit la même pour le maître que pour l'élève, celle-ci peut prendre des significations totalement différentes selon qu'elle suive ou qu'elle précède l'assimilation du concept. Il faut donc que la représentation choisie soit élaborée entièrement par l'enfant et que le maître se borne à demander des précisions ou à souligner des lacunes et des contradictions. En aucun cas, la représentation donnée toute faite par le maître ne pourra être d'une quelconque utilité pour ses élèves.

The Nuffield Mathematics Project

La collection des ouvrages (44) élaborés en Angleterre sous la direction du DR G. Matthews présente un grand intérêt.

Elle mérite notre attention pour plusieurs raisons dont la moindre n'est pas le fait que, à notre connaissance, il s'agit de la seule série de documents sur l'enseignement de la mathématique qui ait reçu la caution de Piaget.

Le but du projet consiste à développer un certain nombre d'idées sur la manière dont l'enfant peut apprendre la mathématique mais non de mettre l'accent sur ce qu'il faut lui enseigner. L'idée centrale en est

que l'enfant doit être libre de faire ses propres découvertes, de penser par lui-même et de développer peu à peu sa compréhension de la mathématique par opposition à un apprentissage basé sur l'entraînement de type répétitif.

Pour développer son raisonnement, l'enfant ne peut pas aller directement à l'abstraction, il a besoin de nombreuses manipulations d'objets concrets. Le titre même de guide introductif de cette collection "I do and I understand" montre bien le caractère que l'on a voulu donner à l'ensemble. Les thèmes abordés - calcul et structure, formes et tailles, des graphiques à l'algèbre - le sont d'une manière cyclique au fur et à mesure du développement de l'enfant. Le même concept est repris plusieurs fois sous des formes différentes, ce qui permet de le travailler au cours de chaque année scolaire.

Si cette collection avait été publiée en français, elle aurait probablement constitué la meilleure source d'information pour le corps enseignant. Outre un grand nombre de suggestions très intéressantes sur le plan des activités à proposer aux élèves, nous en avons retenu, pour notre propre expérience, la nécessité d'un recours très fréquent à la manipulation d'objets, l'accent mis sur la prise en charge par l'enfant de son propre apprentissage, l'apparition de manière cyclique et sous des formes différentes des concepts de base dans chaque degré de la scolarité primaire.

The Minnesota mathematics and science teaching project (MINNEMAST)

Cette collection, qui comprend plus de 30 volumes a été réalisée, avec le concours de la "National Science Foundation" américaine, par l'université de Minnesota. Une équipe prestigieuse y a travaillé sous la direction du professeur J. H. Werntz et du professeur Paul C. Rosenbloom, de la Columbia University. Fortement marquée par l'oeuvre et la pensée de Rosenbloom, cette publication met l'accent, dès l'entrée à l'école, sur le développement de l'observation, l'encouragement à poser des questions, la recherche de "patterns" et de régularité dans ce qui est observé. Elle incite l'enfant à la description et à la participation à des discussions à propos de ce qui a été observé. Les activités pratiques de mesure et les expériences concrètes prennent une large place dans les activités proposées. (45)

Dans l'ensemble de cette oeuvre, nous avons retenu, comme chez les auteurs précédents, la place primordiale que doit prendre la recher-

che personnelle de l'enfant. Nous y avons aussi trouvé la caution de nos efforts pour introduire systématiquement la discussion entre élèves dans la recherche des solutions d'un problème.

Sur le plan des activités de classement, c'est là aussi que nous avons vu apparaître le diagramme en arbre comme premier mode de représentation. Alors que chez d'autres auteurs, il n'est introduit qu'après les diagrammes de Venn ou de Carroll, pour effectuer des classements comportant plus de deux critères, MINNEMAST en fait le premier modèle de classement proposé aux enfants. Une partie importante de nos essais relatifs aux notions géométriques, et plus particulièrement le développement des recherches que l'enfant effectue dans un quadrillage, soit ont été confirmées, soit ont trouvé des prolongements auxquels nous n'avions pas songé, dans la confrontation de notre recherche avec celle de l'équipe américaine. Si l'approche de la notion de mesure est assez voisine de celles de Dienes et de N. Picard, la partie consacrée aux opérations arithmétiques, mis à part l'utilisation intéressante de la "number line", nous a paru moins neuve et moins riche que les autres domaines. Enfin, nous avons été frappé par l'interpénétration harmonieuse des apprentissages de la mathématique et des sciences qui a été réalisée dans ce projet. Indiscutablement, il y a là une voie nouvelle qui mériterait une exploration approfondie et qui devrait déboucher sur des recherches propres à modifier le caractère livresque de l'enseignement des sciences tel qu'il est conçu actuellement dans la plupart des écoles élémentaires de notre pays pour le transformer en un apprentissage de type opératoire et lui donner toute l'importance qu'il aurait dû prendre depuis longtemps dans une société où, d'une part l'homme semble de moins en moins dominer le phénomène scientifique, et d'autre part l'afflux des jeunes vers des études littéraires aux débouchés professionnels aléatoires correspond à une insuffisance chronique de diplômés dans les domaines scientifique et technique.

Le lecteur s'étonnera de la manière hâtive dont, en quelques pages, nous avons fait un sort à des réalisations par rapport auxquelles notre propre travail n'est que grain de sable. Il ira même jusqu'à nous accuser de présomption eu égard à la façon sommaire avec laquelle nous avons émis certaines critiques. Qu'on nous comprenne bien ! Il ne s'agissait pas pour nous de faire une étude d'oeuvres qui, chacune, pourraient donner lieu à plusieurs volumes d'analyses détaillées tellement elles sont denses et riches. Notre propos tendait simplement à montrer quelles ont été nos principales sources d'inspiration et à justifier le besoin que nous avons ressenti non pas d'expérimenter, dans le contexte local, la méthode de tel ou tel auteur célèbre, mais de tenter une synthèse de ces oeuvres et d'essayer, en extrayant de chacune d'elles ce qui nous paraissait le plus valable, de mettre en place

un dispositif compatible avec les réalités et les servitudes d'un système scolaire public dans lequel, par nature, les grandes lignes de l'enseignement doivent être les mêmes dans toutes les classes.

De la même manière, nous serons dans l'impossibilité de nous livrer à une étude approfondie des relations entre la psychologie génétique et l'enseignement de la mathématique, mais nous nous efforcerons de montrer quelle part les préoccupations d'ordre psychologique ont prise - où n'ont pas prise, nous laisserons le lecteur en juger - dans la réflexion qui a présidé à la mise en oeuvre de la réforme.

9.3 L'apport de la psychologie génétique

Il faut tout d'abord reconnaître que la psychologie génétique n'a pas encore eu, sur les programmes et les méthodes d'enseignement, tous les effets que l'on aurait pu en attendre. Et pourtant l'école genevoise, dont tous les instituteurs ont été astreints depuis plus de trente ans à suivre les cours de Piaget, aurait dû, plus que d'autres, être nourrie et vivifiée par la pensée et l'oeuvre du grand psychologue. En fait, sur le plan de l'enseignement des mathématiques, seules les classes accueillant les enfants de 4 à 6 ans, c'est-à-dire de la période qui précède les opérations concrètes, reçoivent depuis de nombreuses années un enseignement dont les grandes lignes s'inspirent très nettement de la pensée piagétienne. A l'école primaire, soit pendant le stade dit des opérations concrètes, nous ne décelons guère une influence de la psychologie génétique sur les programmes ou sur les manuels.

Méconnaissance, indifférence et scepticisme de la part d'un corps enseignant dont bien rares sont ceux qui ont poursuivi l'étude de la psychologie au-delà de l'année universitaire qui leur était imposée, éso-térisme et critiques sévères bien que souvent justifiées de la part des psychologues, ont fait que la collaboration entre pédagogues et psychologues s'est avérée rare et que les études cherchant à faire bénéficier l'enseignement de l'apport de la psychologie ne sont pas nombreuses.

Il faut dire aussi que les querelles entre écoles psychologiques et les divergences de vue concernant les effets de l'apprentissage ne sont pas pour rassurer le pédagogue.

Si nous acceptons le principe selon lequel la mathématique ne s'enseigne pas mais qu'elle s'apprend, l'apprentissage devrait faciliter,

élargir, accélérer le développement de l'enfant. En réalité, les points de vue divergent tout particulièrement en ce qui concerne l'accélération.

Selon Piaget et ses disciples, les structures fondamentales de la pensée ne peuvent pas être assimilées par l'exercice. Leur progrès ne peut guère être accéléré par les conditions d'enseignement. En revanche, dans les limites d'un niveau, d'un stade de développement donné, un apprentissage de qualité donnera à chaque enfant la possibilité d'un développement plus complet. En outre, au moment où l'enfant est prêt à passer d'un stade à un autre, la qualité d'apprentissage peut jouer un rôle accélérateur de ce passage.

D'un autre côté, le psychologue américain Bruner prend une position opposée. Selon lui, c'est l'apprentissage et l'exercice qui permettent la construction de la structure logique. Par conséquent, un apprentissage bien compris devrait sensiblement accélérer la construction des structures intellectuelles.

Nous avouons être placé dans une situation inconfortable entre ces deux points de vue. D'une part, la position de Piaget semble tout à fait solide. Cependant les résultats enregistrés lors de la passation, par des groupes d'étudiants, d'épreuves piagésiennes classiques ont montré que dans les classes expérimentales, la proportion des réussites augmentait considérablement. D'autre part, il convient de se méfier d'un succès, aussi spectaculaire soit-il, obtenu dans un domaine limité. Les activités basées sur la notion d'ensemble favorisent l'acquisition de la structure multiplicative et de l'emboîtement des classes. Est-ce que, pour autant, l'inclusion est bien devenue opératoire avant l'âge de sept ans ?

Nous n'en sommes pas convaincu. C'est pourquoi, dans une réforme qui, de toute manière, constitue une étape et sera suivie de nombreux ajustements, il a paru plus sûr et plus prudent d'envisager l'apprentissage comme le moyen d'aider l'enfant à franchir les différents paliers séparant chaque stade, l'objectif final étant d'amener le plus grand nombre possible d'enfants au seuil du stade des opérations formelles à la fin de la scolarité primaire. Ainsi notre position rejoint celle de Fischbein lorsque celui-ci déclare :

- " Du moment qu'il s'agit de paliers successifs, de structures psychiques caractérisées par une organisation hiérarchique et par un ensemble de dépendances intérieures, le passage d'un stade

à l'autre ne peut pas avoir lieu par fragments. La nouvelle structure peut remplacer la précédente seulement au moment de la constitution, dans le cadre du stade précédent, d'un ensemble de moyens intellectuels dépendant les uns des autres, se conditionnant et s'engrenant réciproquement. Certains décalages, certains retards isolés peuvent, bien sûr, se produire, mais un concept ou un procédé mental dépendant d'une structure ne peut devenir vraiment efficient avant que l'ensemble ait été constitué. On ne peut pas dissocier le concept de nécessité de celui de généralité et les deux d'une certaine capacité d'abstraction. Un raisonnement déductif n'a pas de sens en dehors de ces modalités.

Un apprentissage des structures intellectuelles est donc irréductible à l'apprentissage empirique. Mais ceci ne signifie pas qu'il serait impossible. Si l'instruction se propose de favoriser le passage à un stade supérieur, elle doit avancer sur un front large, en agissant simultanément sur tous les aspects importants." (46)

La lecture de Piaget fournit une caution indiscutable à quelques-uns des principes qui ont guidé notre expérience.

En premier lieu, nous y puiserons l'exigence d'un enseignement dans lequel l'enfant est actif :

" Or nous avons vu l'importance de l'activité du sujet dans le développement cognitif de l'enfant et il va de soi que si nous transposons cette connaissance au niveau des situations pédagogiques et d'enseignement, une large part sera faite à l'activité de l'élève dans une "pédagogie piagétienne". C'est certainement en connaissance de cause - grâce aux nombreuses recherches sur la genèse de la connaissance opératoire chez l'enfant - que Piaget défend résolument une pédagogie active." (47)

En second lieu, Piaget a mis en évidence la relation qui existe entre la mathématique moderne et le développement de l'enfant :

" En un mot, le problème central de l'enseignement des mathématiques est celui de l'ajustement réciproque des structures opératoires spontanées propres à l'intelligence et du programme ou des méthodes relatifs aux domaines mathématiques enseignés. Or, ce problème s'est profondément modifié en ces dernières décades à cause des transformations des mathématiques elles-mêmes : par un processus en apparence paradoxal, mais psychologique-

ment naturel et fort explicable, les structures plus abstraites et plus générales des mathématiques contemporaines rejoignent bien davantage les structures opératoires naturelles de l'intelligence et de la pensée que ne le faisaient les structures particulières qui constituaient l'armature des mathématiques classiques et de l'enseignement.

On sait, en effet, que depuis les travaux de l'école BOURBAKI (prolongeant eux-mêmes une longue suite d'efforts orientés dans le même sens), les mathématiques apparaissent aujourd'hui non plus comme un ensemble de chapitres plus ou moins séparés, mais comme une vaste hiérarchie de structures s'engendrant les unes les autres à partir de quelques "structures mères" qui se combinent entre elles ou se différencient de diverses manières. Ces structures élémentaires sont au nombre de trois : les structures algébriques, caractérisées par une réversibilité à forme d'inversion ($T - T^{-1} = 0$) et dont le prototype est le "groupe", les structures d'ordre, dont la réversibilité est une réciprocity caractéristique des systèmes de relations, et dont le prototype est le "réseau" et les structures topologiques portant sur les notions de continuité et de voisinage (correspondances bi-univoques et bi-continues, etc...).

Or, il se trouve que ces trois structures mères correspondent d'assez près aux structures opératoires fondamentales de la pensée. Dès les "opérations concrètes" dont il a déjà été question on trouve des structures algébriques dans les "groupements" logiques de classes, des structures d'ordre dans les "groupements" de relations et des structures topologiques dans la géométrie spontanée de l'enfant (qui est topologique bien avant d'atteindre les formes projectives ou la métrique euclidienne, conformément à l'ordre théorique et contrairement à l'ordre historique de la constitution des notions). Dès les opérations "propositionnelles" on trouve des structures opératoires de "groupes" et de "réseaux", etc... .

S'inspirant des tendances bourbakistes, la mathématique moderne met donc l'accent sur la théorie des ensembles et sur les isomorphismes structuraux plus que sur les compartimentages traditionnels, et tout un mouvement s'est dessiné qui vise à introduire de telles notions le plus tôt possible dans l'enseignement. Or, une telle tendance se justifie pleinement, puisque précisément les opérations de réunions ou d'intersections d'ensembles, les mises en correspondance source des isomorphismes, etc..., sont des opérations que l'intelligence construit et utilise spontanément dès 7 ou 8 ans et bien plus encore dès 11-12 ans (en ar-

rivant à ce niveau à la structure complexe des "ensembles de parties", source de la combinatoire et des "réseaux") ". (48)

En troisième lieu, la psychologie génétique appuie nos réserves quant à l'utilisation des représentations (au sens de Dienes) sans la construction parallèle du langage. S'il est vrai que la pensée et la fonction symbolique se développent en étroite symbiose et précèdent le langage, ce dernier joue un rôle important dans la consolidation de la pensée.

"... il est permis de conclure que la pensée précède le langage et que celui-ci se borne à la transformer profondément en l'aidant à atteindre ses formes d'équilibre par une schématisation plus poussée et une abstraction plus mobile...

... les opérations $+$, $-$, etc., sont donc des coordinations entre actions avant de pouvoir être transposées sous forme verbale et ce n'est donc pas le langage qui est cause de leur formation : le langage étend indéfiniment leur pouvoir et leur confère une mobilité et une généralité qu'elles n'auraient pas sans lui...

... le langage est donc une condition nécessaire mais non suffisante de la construction des opérations logiques. Elle est nécessaire, car sans le système d'expression symbolique que constitue le langage, les opérations demeureraient à l'état d'actions successives sans jamais s'intégrer en des systèmes simultanés ou embrassant simultanément un ensemble de transformations solidaires. Sans le langage, d'autre part, les opérations resteraient individuelles et ignoreraient par conséquent ce réglage qui résulte de l'échange interindividuel et de la coopération. C'est en ce double sens de la condensation symbolique et du réglage social que le langage est donc indispensable à l'élaboration de la pensée. Entre le langage et la pensée il existe ainsi un cercle génétique tel que l'un des deux termes s'appuie nécessairement sur l'autre en une formation solidaire et en une perpétuelle action réciproque." (49)

Notre démarche pédagogique comportera donc plusieurs étapes : action, verbalisation à propos de l'action, représentation, verbalisation à propos des représentations, anticipation verbale de nouvelles actions plus élaborées, action, etc.. Ainsi l'étroite relation existant entre l'action, le langage et la représentation symbolique permettra à la fois l'échange sur le plan social, la construction d'un langage en liaison avec le raisonnement logico-mathématique, l'entraînement à la formulation d'hypothèses et à leur vérification. Elle don-

nera aussi au maître la possibilité de vérifier si la connaissance qui apparaît dans les manipulations et les représentations de l'enfant est assez intériorisée pour qu'une nouvelle étape soit abordée.

En quatrième lieu, la mise en évidence, par la psychologie génétique, de la construction structurale du raisonnement logico-mathématique justifie un enseignement fortement structuré par opposition à l'enseignement de type classique dans lequel le lien entre les différentes notions enseignées est relativement faible.

" Pour contribuer à l'élaboration des structures mentales, l'enseignement doit être lui-même structural. L'enseignement doit mettre l'accent sur les concepts fondamentaux, sur les idées directrices, sur les techniques essentielles de découverte, d'organisation, d'interprétation des faits dans un domaine de connaissances...

... En apprenant les mathématiques d'une manière moderne (et non pas simplement les concepts modernes des mathématiques) l'élève apprend tout d'abord à découvrir au-delà de la variété apparente, les relations fondamentales et leurs propriétés, les modes fondamentaux d'organisation des entités mathématiques et surtout la dynamique vivante de ces relations et classifications." (50)

Il est bien évident que la conception moderne de la mathématique va exactement dans le sens d'une conception structurale de l'enseignement. Dans un petit opuscule, le mathématicien A. Revuz écrit :

"Quels sont les avantages de cette nouvelle organisation des mathématiques ? Ils sont nombreux et considérables.

Un premier est de rendre son unité à une Science qui se dispersait. Le faisceau divergent est regroupé. Les mathématiciens utilisent les mêmes concepts et le même langage dans toutes les branches : il est légitime de parler, non plus des mathématiques, mais de la mathématique.

Plus important encore est le fait de mettre en évidence le caractère dynamique de la mathématique qui est action, et non contemplation. Une espèce de structure correspond à un mode de pensée, et chaque structure particulière à des possibilités d'action sur les ensembles qui en sont munis. La pensée qui a pris conscience de ces structures est obligatoirement active, et spontanément agressive à l'égard des problèmes à résoudre. Dans ce contexte, un théorème n'est plus l'énoncé d'une véri-

té conservée dans un ciel platonicien, mais l'assurance de pouvoir agir d'une certaine manière dans des conditions données." (51)

Il y a donc convergence étroite entre une mathématique qui se veut structurale par essence et une psychologie qui montre avec évidence que l'assimilation d'une connaissance nouvelle ne consiste pas à enregistrer passivement des faits et des lois venant se juxtaposer aux connaissances antérieures mais que chaque élément nouveau de connaissance, par action et réaction, se répercute sur la construction de l'ensemble du raisonnement.

En cinquième lieu, et c'est peut-être là que l'apport est le plus riche mais aussi le plus difficile à exploiter, une très large partie de l'oeuvre de Piaget et des publications du centre international d'épistémologie génétique constitue une source d'informations irremplaçable pour l'élaboration des programmes. Le fait de connaître comment l'enfant construit ses connaissances, de savoir quels sont les paliers et les moments critiques du passage d'un stade à un autre, de pouvoir déterminer au moins approximativement les parallélismes existant entre les notions logiques, spatiales, numériques afin de les appuyer les unes sur les autres et de les impliquer dans une structure unique et générale, devrait conduire - car nous n'avons fait qu'un petit bout de chemin dans cette direction - à l'élaboration d'un véritable plan d'études de la mathématique. Sans entrer dans les détails qui apparaîtront dans la dernière partie de cet ouvrage, nous dirons que nous nous sommes appuyés autant que possible, dans l'élaboration d'une méthodologie et dans l'ordre de succession des activités proposées aux enfants, sur les données piagésiennes. Il convient cependant de relever que des contraintes au niveau des programmes et l'ampleur de la tâche à accomplir ne nous ont pas permis d'aller toujours aussi loin que nous l'aurions souhaité.

10. L'EXPERIENCE GENEVOISE

10.1 Organisation et planification

Toute expérience d'une certaine envergure demande une phase exploratoire préliminaire. Dans le cas qui nous concerne, la recherche a été conditionnée par le fait que, lorsque nous avons abordé l'enquête, une expérience restreinte avait déjà été entreprise depuis deux ans, touchant à la fois l'enseignement préscolaire et les trois premières années de la scolarité obligatoire. Pour nous en tenir à cette dernière, dix classes par degré, en première, deuxième et troisième années, essayaient une méthode et un programme d'enseignement basés sur les travaux de N. Picard.

Notre première tâche consista donc en la mise en place d'un dispositif expérimental tenant compte à la fois de la situation existante et de la nécessité, au terme de la réforme, d'introduire le nouveau type d'enseignement dans les quelques mille classes primaires du canton. Il fallait aussi ne pas négliger les incidences que pourraient avoir, par la suite, les travaux en cours qui touchaient à l'élaboration d'un programme de mathématiques commun à tous les cantons romands.

Une entreprise qui doit mener, dans un délai raisonnable et sans inconvénient pour les élèves, une transformation complète de l'enseignement des mathématiques, exige une organisation à la fois précise et souple, qui permette à chacun des membres de l'équipe de recherche de s'exprimer selon son génie propre tout en s'inscrivant dans un plan général cohérent.

Il est indispensable de prévoir, dès le départ, la filière que suivront les élèves tout au long de leur scolarité. Il faut que les maîtres qui s'initient à la nouvelle méthode le fassent avec un sentiment d'intérêt et de sécurité. Il faut aussi que soient coordonnés le nombre des maîtres formés ou en cours de formation dans chaque degré et le nombre de classes nouvelles disponibles. Il serait impensable, en effet, de demander à un instituteur ou à un groupe d'élèves de travailler un an dans la nouvelle optique, puis de revenir au système traditionnel et ainsi de suite. Les écoliers qui changent de domicile doivent s'intégrer sans difficulté dans une nouvelle classe. Il convient également de tenir compte de ce qui se fait dans les autres cantons ou à l'étranger. L'information et la formation, tant des maîtres en exercice que des autorités scolaires, du corps inspectoral et des élèves accomplissant leurs études pédagogiques, entrent également dans le plan général.

Lorsqu'on entreprend une mutation très profonde dans une discipline aussi importante, on ne peut courir l'aventure. Une extension trop rapide du nouvel enseignement provoquerait des difficultés considérables et pourrait mener à un échec. En premier lieu, il n'est pas possible, à la fin d'une année scolaire, de juger valablement l'efficacité de l'enseignement qui a été donné pendant cette année. Les vérifications doivent être effectuées au cours de l'année suivante. En second lieu, les expériences faites provoquent des changements qui nécessitent de nouveaux essais. Or ceux-ci ne peuvent avoir lieu qu'un an plus tard, à la même époque. Enfin l'enseignement de la mathématique pendant les six années primaires forme un tout, les modifications apportées à un moment donné ayant des incidences sur l'ensemble du système.

Dans l'étude expérimentale, il faut tenir compte du contenu mathématique, du choix des types d'exercices et de jeux les plus utiles à l'acquisition des notions retenues, de la manière d'enseigner. Les expériences doivent permettre de préciser la manière de former les maîtres, les indications méthodologiques, l'ordre de succession des notions, le temps imparti à chacune d'elles, leur place dans le développement génétique de l'enfant. Un délai de cinq ans pour aboutir à la réforme de l'enseignement dans un degré d'âge donné constitue un minimum au-dessous duquel il est impossible de descendre.

Cependant, le fait de conduire une expérimentation limitée à un petit groupe de maîtres et d'élèves placerait les expérimentateurs dans des conditions particulièrement favorables et quelque peu artificielles. Il est absolument indispensable de vérifier la valeur d'un nouveau mode d'enseignement dans les conditions de travail habituelles de n'importe quelle classe.

C'est pourquoi, après une série d'essais dans un petit groupe, il convient de répéter ces essais sur une base plus large, dans des écoles différentes, avec des conditions de travail aussi variées que possible, avec des maîtres d'âge, de formation et de tempérament différents.

Ensuite seulement, la mise au point d'une méthode et d'un programme pourra intervenir et le recyclage de l'ensemble du corps enseignant sera entrepris.

D'un autre côté, nous devons tenir compte des perturbations qu'apporte sur le plan de l'organisation scolaire, des mutations, des éditions

Mis à part la première année scolaire, degré où le nouvel enseignement a été généralisé plus tôt que prévu, ce schéma, avec quelques changements dus à des modifications dans l'organisation des classes a été respecté. La population scolaire participant à la recherche a été la suivante :

		D E G R E				
		2e	3e	4e	5e	6e
1968-1969	Classes	24	8	11	-	-
	Elèves	624	200	265	-	-
1969-1970	Classes	36	28	12	10	-
	Elèves	885	693	292	254	-
1970-1971	Classes	73	48	28	13	10
	Elèves	1825	1184	687	285	228
1971-1972	Classes	118	73	53	29	13
	Elèves	2940	1832	1324	710	286

On remarquera que, fréquemment, le nombre des classes augmente lors du passage d'un degré à un autre. Cela provient du fait que nous avons donné l'assurance aux parents d'élèves soumis à l'expérience que leur enfant recevrait le nouveau type d'enseignement durant toute la scolarité primaire. Dans tous les cas où des dédoublements de classes étaient imposés par les effectifs, ce sont les sujets ayant reçu un enseignement de type classique qui sont venus grossir le groupe expérimental.

Dans le secteur enfantin, qui inclut, outre la préscolarité, la première année primaire, il a fallu procéder différemment. Après une série d'essais auxquels ont participé une trentaine de maîtresses enfantines, le nouveau type d'enseignement a été généralisé en 1967-1968 pour les enfants de cinq ans et en 1969-1970 en première année primaire.

En deuxième année, nous aurions pu introduire l'enseignement rénové dans toutes les classes dès la rentrée scolaire 1971. Si nous y avons renoncé, c'est dans l'intention de donner la meilleure informa-

tion possible au corps enseignant. L'extension volontairement retardée fera que l'ensemble des classes de deuxième année pratiquera le nouveau type d'enseignement à partir de l'année scolaire 1973-1974 et que la généralisation sera effective dans toute l'école primaire genevoise en 1977-1978.

10.2 Formation du corps enseignant

La solution donnée au problème de l'information et de la formation du corps enseignant constitue la clef de voûte de l'édifice formé par l'ensemble des mesures à prendre. La difficulté s'avère d'autant plus grande lorsque la réforme implique à la fois une transformation du contenu et un changement de méthodes. Les écueils à éviter sont nombreux.

En premier lieu, la question de la participation des maîtres doit trouver une réponse satisfaisante. Il est impensable, lorsque l'objectif vise toutes les écoles et tous les enseignants, que le changement reçoive l'adhésion complète de chaque intéressé et que l'enthousiasme soit général. Il faut donc trouver des moyens pour exploiter pleinement l'impulsion donnée par les maîtres particulièrement intéressés, pour convaincre les sceptiques, pour rallier les indifférents.

En second lieu, un problème de communication se pose. L'information apportée sur le plan du contenu, c'est-à-dire l'initiation à la mathématique moderne, est souvent confiée à un professeur de mathématique du second degré. Celui-ci se trouve confronté à un public totalement différent de celui dont il a l'habitude. De ce fait, les exemples et les démonstrations proposés, triviaux pour le professeur, adaptés aux possibilités des élèves de l'enseignement secondaire, ne conviennent guère aux instituteurs et aux institutrices qui ne perçoivent et ne retiennent en général qu'un nouveau langage, le langage ensembliste et relationnel, et qui voient dans la matière présentée un certain nombre de chapitres qui viendront remplacer ou s'ajouter au contenu antérieur du programme. Cette incompréhension quant à la restructuration profonde de tout l'édifice mathématique est en grande partie la cause de l'opposition stérile des tenants et des détracteurs de l'enseignement de la mathématique moderne.

Les tentatives effectuées parfois pour doubler le mathématicien d'un psychologue n'ont guère eu plus de succès. La formation reçue par le psychologue le condamne souvent, s'il ne veut pas se renier lui-même, à une critique assez sévère de l'enseignement. Cependant, les

enseignants lui reprocheront de méconnaître la globalité des problèmes que pose la tenue quotidienne d'une classe et de leur imputer des conduites sur lesquelles ils n'ont aucune prise, imposées qu'elles sont par le système scolaire.

Un autre souci doit encore être évoqué. Dans certains essais effectués en Suisse ou à l'étranger, l'information mathématique, pédagogique et psychologique a été concentrée sur une période brève, à l'occasion d'un cours de vacances par exemple. Or cette manière de faire comporte deux inconvénients. Le premier provient du fait que des instituteurs et des institutrices astreints brutalement à l'assimilation d'un cours de mathématique donné à raison de plusieurs heures par jour ne peuvent en tirer grand profit en raison de l'effort mental qu'un tel cours demande à des personnes ayant achevé leurs études depuis de nombreuses années. Le second est encore plus important. Nourri de mathématique moderne, gavé d'idées, de recettes, de conseils, le maître reprend sa classe persuadé que son enseignement sera efficace. Très vite cependant, la solitude aidant, il prendra conscience des difficultés insoupçonnées qu'il lui faut surmonter. L'abandon des anciens critères de réussite lui donnera un sentiment d'insécurité ; il ne saura pas s'il en a assez fait, s'il est en avance ou en retard dans son programme, jusqu'à quel point il devra développer les exercices ouverts, comment ses élèves acquerront tout de même les techniques de calcul et les tables d'addition et de multiplication. Dans le domaine des ensembles et des relations, les enfants lui présenteront des travaux personnels, lui poseront des questions, qui lui feront prendre conscience de son insécurité sur le plan mathématique. Il aura enfin à répondre aux doutes, aux critiques acerbes parfois, de parents sensibles au caractère polémique de certaines publications.

En raison de cet ensemble de faits, le risque est grand que, rapidement les données de la mathématique moderne ne soient qu'un chapitre de plus venant s'ajouter aux notions contenues dans les programmes antérieurs et que le retour à des pratiques pédagogiques basées sur la mémorisation et la répétition vident la réforme de toute sa substance.

Le plan de formation du corps enseignant devra donc être conçu de manière à limiter les inconvénients qui viennent d'être mentionnés.

La plupart des maîtres en exercice ne connaissent, de la mathématique moderne, que les articles de grande vulgarisation. Il est donc indispensable, avant qu'ils participent à l'expérimentation, de leur fournir une information préalable. Cette information est donnée sous forme

de cours facultatifs dans lesquels les éléments de base sont présentés. Un cours comprend douze séances hebdomadaires d'une heure. Il est répété deux fois dans l'année scolaire et présente les éléments essentiels du langage ensembliste et des relations ainsi qu'une première initiation aux notions d'opération et de structure.

Lorsqu'un maître est désigné comme titulaire d'une classe pratiquant l'enseignement rénové, il est convoqué pour deux journées d'information au cours desquelles les notions mathématiques nouvelles sont précisées en liaison étroite avec l'enseignement qu'il aura à assumer.

Cependant, l'esprit dans lequel cet enseignement doit être donné pourrait difficilement s'acquérir dans un cours, même intensif, de quelques jours.

Les expériences ont montré qu'une information, aussi intense et bien préparée soit-elle, concentrée sur une courte période, ne donne pas satisfaction. Il faut que le maître, après avoir reçu une information de base, applique les idées nouvelles dans sa propre classe, prenne conscience par les réactions de ses élèves de leur valeur et de leur intérêt mais aussi des difficultés qu'elles suscitent. Il faut ensuite que, lors de réunions régulières, il puisse recevoir une information complémentaire, faire part des problèmes qu'il a rencontrés, discuter avec des collègues et échanger des idées, des exemples d'activités, des matériels.

Il faut enfin qu'il n'ait pas l'impression de se lancer dans une aventure sans lendemain mais que, tout au long de sa reconversion, il éprouve un sentiment de sécurité.

C'est pourquoi, il a paru judicieux d'étendre le recyclage sur une période de deux ans, à raison de sept séances d'une demi-journée par an. De cette manière, le maître a le temps de passer progressivement du système traditionnel au système nouveau, d'un enseignement à caractère très directif et très systématique à un enseignement plus large et plus souple où la part de l'enfant prend une place prioritaire.

Au cours de la première année, le maître prend contact avec le nouvel enseignement, imite et adapte à son propre tempérament les activités mathématiques qui lui sont proposées.

Dans la seconde année, il peut se livrer à une réflexion plus profonde sur son enseignement, le modifier en fonction d'une meilleure connais-

sance des objectifs généraux et des possibilités des enfants, tout en recevant un appui régulier qui lui permet de contrôler la validité de son action, du double point de vue pédagogique et mathématique.

En effet, la difficulté ne réside pas tant dans le fait que l'on doit inculquer aux élèves un certain nombre de notions nouvelles qui viennent remplacer ou transformer les anciennes. Ce qui est difficile, c'est de fournir aux enfants des situations dans lesquelles ils n'effectueront pas tous le même travail, c'est de permettre, de provoquer même, la discussion entre les élèves, c'est d'avoir la patience d'attendre que les écoliers découvrent la solution d'un problème eux-mêmes alors qu'on éprouve l'envie de leur indiquer la marche à suivre, c'est d'admettre une démarche de pensée à laquelle on n'avait pas songé. Et c'est surtout, de procéder à un reclassement de la hiérarchie des valeurs, de placer au premier rang le raisonnement logico-mathématique, la communication orale ou écrite de l'information, l'esprit d'invention, et d'admettre que la technique des opérations arithmétiques, les tables d'addition et de multiplication, si elles sont nécessaires, ne sont que des outils secondaires au service de la pensée.

Les réunions mensuelles sont animées par des maîtresses de méthodologie ayant une solide expérience de l'enseignement qui ont reçu une formation complémentaire sur le plan mathématique, appuyées chaque fois que le besoin s'en fait sentir, par un mathématicien ou un psychologue. Elles ont lieu, à tour de rôle, dans l'école de l'un des participants. Après une démonstration de leçon, la séance offre l'occasion d'apporter des renseignements d'ordre mathématique et pédagogique, de discuter les réussites et les échecs, de préparer le travail du mois suivant.

Pour les raisons indiquées ci-dessus, il convient de mettre à la disposition du corps enseignant, tout au moins pendant la période initiale, des conseillers qui puissent, soit sur le plan mathématique, soit sur le plan pédagogique, apporter une information complémentaire chaque fois que le maître est en difficulté.

Il arrive en effet que, lors d'une séance de travail avec un groupe d'élèves, la recherche des enfants prenne une direction à laquelle on n'avait pas songé et que l'institutrice ne soit plus à même de garantir la validité du raisonnement du point de vue mathématique. Il est assez fréquent aussi, qu'une leçon laisse un sentiment d'échec et qu'on éprouve le besoin de voir cette leçon reprise avec les mêmes élèves, par une personne compétente.

Le corps enseignant dispose alors de deux possibilités d'appui. En premier lieu, chaque jour, après les heures de classe, les animateurs reçoivent et conseillent les maîtres qui le désirent. En second lieu, le titulaire d'une classe peut, en tout temps, demander un appui individuel. L'animatrice se rend alors dans sa classe, fait travailler les élèves, donne des conseils et des suggestions.

Le travail des animateurs se distance nettement de la notion d'inspection. L'animateur conseille, explique, suggère, démontre ; en aucun cas il n'est autorisé, à moins que celui-ci n'en fasse la demande expresse, à porter un jugement au sujet de l'activité du maître ou des performances de ses élèves. Cette politique permet d'instaurer un climat de confiance qui engage les maîtres à solliciter un appui chaque fois qu'une difficulté se présente. En toute honnêteté, il faut cependant relever que la prise de conscience, par le maître, qu'un problème n'est pas résolu, est parfois malaisée, les modèles d'action antérieurs venant masquer la difficulté.

Au terme de ces deux années de formation, le maître est généralement prêt à poursuivre seul sa tâche et à se perfectionner par des lectures. Les animateurs restent cependant à sa disposition pour les appuis complémentaires qu'il pourrait solliciter.

10.3 Programme

Il a déjà été signalé que, dans le cadre de l'expérience, notre liberté n'était pas totale en ce qui concerne la définition du programme. Les autorités des cantons romands ont, depuis plusieurs années, pris la décision d'harmoniser leurs structures scolaires et leurs programmes d'enseignement. De nombreuses commissions de travail élaborent des projets qui passeront dans la réalité des faits à partir de 1973. En ce qui concerne la mathématique, une commission dont nous avons suivi attentivement les travaux a élaboré, entre 1968 et 1971, un programme dont les grandes lignes correspondent aux intentions ayant présidé à la mise en place de l'expérience genevoise. Les auteurs de ce programme définissent comme suit leur objectif général :

"... l'enseignement de la mathématique à l'école primaire doit :

- favoriser une bonne structuration mentale, c'est-à-dire développer le raisonnement logique, la capacité de situer, de classer, d'ordonner ainsi que de comprendre et de représenter une situation;

- donner une bonne connaissance intuitive des notions fondamentales :
 - les ensembles, les relations, les opérations, les structures;
- procurer un outil intellectuel utilisable dans les situations les plus diverses de la vie courante;
- développer les pouvoirs d'adaptation et d'invention (52)

Le programme proposé tient compte le plus largement :

- "- de la façon dont les mathématiciens envisagent actuellement l'organisation de leur science ;
- des observations faites par les psychologues;
- des expériences de mathématique moderne à l'école primaire poursuivies dans quelques cantons romands et dans certains pays."

Il (le programme) montre d'abord l'orientation nouvelle donnée à l'enseignement de la mathématique. Il est ensuite un programme cadre, c'est-à-dire qu'il indique les notions à acquérir dans chacun des degrés, notions qu'il est toujours possible d'approfondir.

Il est par ailleurs absolument indépendant d'un matériel donné. A tous les degrés, des manipulations sont nécessaires et c'est en utilisant des matériels variés, matériels de fortune souvent, que le travail se fait de la manière la plus efficace.

La logique étant à la base même de la mathématique, elle sera, pour chaque degré, sous-jacente à toute activité mathématique."
(53)

Si l'on peut se rallier sans grandes restrictions à cette déclaration d'intention - la principale réserve étant l'incertitude de ce que sous-entendent exactement les auteurs en parlant des notions à acquérir dans chaque degré - le programme lui-même appelle deux remarques.

La première est que ce programme a été élaboré par un groupe de discussion sans être soutenu par une expérimentation systématique. Nous avons tenté loyalement de le respecter mais l'expérience pratique nous

a contraint d'y apporter quelques retouches. La seconde touche à la conception même de la rédaction du programme. Celui-ci est constitué d'une liste de notions à présenter aux élèves mais ces notions ne sont pas précisées en termes d'objectifs à atteindre et de paliers à franchir. De ce fait, il est susceptible de provoquer de grandes divergences d'interprétation. Il est vrai que la réalisation de manuels correspondant au programme viendront par la suite préciser les choses. Néanmoins, on ne comprend pas toujours comment s'effectue la progression d'un degré à l'autre. Sans nous livrer à une critique détaillée d'un document qui, par ailleurs, constitue une excellente base de départ et qui, de par son caractère général, laisse une grande liberté d'action, nous illustrerons notre propos par deux exemples.

En ce qui concerne la représentation d'ensembles, nous lisons :

Première année : "Essai de représentation d'un ensemble puis de deux ensembles par un tableau à double entrée (diagramme de Carroll) ou un diagramme de Venn."

Deuxième année : "Représentation de deux puis de trois ensembles par un diagramme de Venn.

Pour deux ensembles : reprise du tableau à double entrée."

Troisième année : "Représentation d'ensembles (en particulier pour des ensembles définis par leurs propriétés caractéristiques : ensembles définis en compréhension) par des diagrammes (Venn, Carroll, arbre)."

Quatrième année : "Représentation d'ensembles par un diagramme de Venn, par un diagramme de Carroll, par un diagramme en arbre, à l'aide de cartes à perforation marginale."

"Passage d'un mode de représentation à un autre."

Les maîtres auxquels ces textes ont été soumis ont eu l'impression qu'il n'y avait guère de changement d'un degré à l'autre. En outre, la définition d'un ensemble en compréhension, qui apparaît dès l'entrée à l'école lorsque la maîtresse demande au banbin de faire un collier de perles rouges, semble n'intervenir qu'en troisième année.

Le deuxième exemple porte sur ce qui est placé sous la rubrique : Exercices de topologie.

- Première année : "Notions de voisinage et de position".
- Deuxième année : "Voisinage et position ; notion d'ordre ; frontières."
- Troisième année : "Domaines et frontières."
- Quatrième année : "Domaines et frontières (revision et extension du programme de 3e année)."

Quelles recherches, quelles activités, quels exercices le maître devra-t-il mettre sous ces rubriques ?

Certes, nous savons les difficultés que présente l'élaboration d'un programme de mathématique dans une période où cette discipline est en pleine mutation mais on comprendra que nous ayons éprouvé le besoin de doter les maîtres genevois d'un plan d'études plus précis et plus détaillé ainsi que de leur fournir, sur leur demande, une liste des objectifs à atteindre à la fin de chaque année scolaire.

On trouvera, aux pages 125 à 136, le document qui a servi de trame à l'expérimentation.

ENSEMBLES

- Manipulation d'objets et énumération de leurs attributs. Partition d'un ensemble selon un critère. Utilisation de la négation. Notion d'appartenance.
- Approche de la classification multiplicative. Partition d'une partition. Représentation au moyen d'un arbre de classement et d'un diagramme de Carroll.
- Manipulation d'objets préparant le concept d'inclusion.
- Révision de la notion d'appartenance.
- Partition d'un ensemble en fonction d'un ou de deux critères. Représentation de cette partition par un arbre de classement ou un diagramme de Carroll.
- Classification selon trois critères. Représentation par un arbre de classement puis par un diagramme de Venn.
- Négation d'un ou de plusieurs attributs et approche de la notion de complémentaire.
- Approche de l'inclusion.
- Activités de classification. Choix de deux (Carroll) ou trois (Venn, arbre) critères dans un matériel qui comporte au moins quatre attributs. Représentation d'ensembles par des diagrammes (Venn, Carroll, arbre). Premières classifications de données numériques ou sémantiques.
- Inclusion. Manipulations et représentations.
- Liaison entre les différents modes de représentation.
- *Faire clairement la distinction entre un ensemble et ses éléments.*
- *Maîtriser le concept d'appartenance et de non appartenance.*
- *Utiliser un arbre de classement comportant deux critères.*
- *Etablir, avec du matériel concret, un tableau à double entrée.*
- *Elaborer, avec un matériel concret, un classement comportant deux critères.*
- *Représenter un classement par un diagramme de Carroll ou un arbre.*
- *Placer des objets dans un diagramme dont les critères sont définis (étiquettes portant des attributs qualitatifs).*
- *Elaborer, avec un matériel concret, un classement comportant trois critères (éléments concrets ou données numériques simples).*
- *Représenter un classement selon trois critères par un diagramme de Venn ou un arbre.*
- *Représenter un classement selon deux critères par un diagramme de Carroll ou un tableau à double entrée.*
- *Placer des éléments dans un diagramme dont les critères sont définis (étiquettes).*
- *Retrouver, dans des cas simples, les critères qui ont servi à l'élaboration d'un classement.*

- 4 - Consolidation des activités de classification. Exercices portant sur des données verbales, spatiales ou numériques.
- Représentations correspondantes.
- Passage d'une représentation à un autre.
- Inclusion.
- Emploi de l'expression "si ... alors ..." dans des jeux.
- 5 - Exploitation des notions antérieures. Les différents modes de représentation constituent un outil de travail pour l'acquisition de connaissances nouvelles.
- Approche de l'implication (si ... alors ...).
- 6 - Utilisation de diverses représentations d'ensembles pour l'organisation de données numériques, géométriques, verbales, etc.
- Cas simples d'implication.
- *Elaborer un classement comportant au moins trois critères (données verbales ou numériques).*
- *Choisir le diagramme qui convient à la représentation d'un classement.*
- *Retrouver, sur la base d'un classement effectué selon trois critères, le mode de classement utilisé.*
- *Maîtriser la notion d'inclusion.*
- *Maîtriser, à l'exclusion du langage formel, les notions d'ensembles ainsi que les différents modes de représentation de ces ensembles.*
- *Déterminer la représentation la plus adéquate à une situation donnée.*
- *Utiliser les représentations d'ensembles pour organiser n'importe quelles données.*
- *Utiliser l'implication dans des cas simples.*

OPERATIONS LIEES AUX ENSEMBLES

- Approche de la notion d'intersection. Utilisation du mot "et" qui traduit la conjonction de deux attributs. Représentation au moyen des diagrammes de Venn et de Carroll.
- Idée de réunion. En particulier, réunion d'ensembles disjoints.
- Approche du produit cartésien. Tableau à double entrée (tableau bien arrangé). Jeux dans un quadrillage (notion de carrefour).
- Intersection de deux ensembles. Représentation par un diagramme de Venn ou de Carroll.
- Réunion. Réunion d'ensembles disjoints comme opération inverse de la partition. Réunion d'ensembles non disjoints. Représentation de la réunion par un diagramme de Venn ou de Carroll.
- Approche de la notion de "ou" inclusif.
- Produit cartésien. Notion d'élément obtenu par la conjonction de deux propriétés. Représentation par un tableau à double entrée.
- Approche intuitive de la notion de groupe. Composition de deux transformations.
- Intersection de deux puis de trois ensembles (matériel concret). Représentation d'une intersection. Énumération des propriétés des éléments correspondant à chaque plage.
- Réunion d'ensembles disjoints et non disjoints. Énumération des propriétés des éléments appartenant à la réunion et à son complémentaire. Emploi du "ou" inclusif.
- Approche des règles de Morgan.
- Produit cartésien. Développement des activités abordées en deuxième année. Notion de couple. Passage de $E \times F$ à $E \times E$.
- Jeux préparatoires à l'idée de combinatoire.
- Structure de groupe. Rotations et symétries. Composition de deux transformations. Equations. Réduction de chaînes de transformation. Elaboration d'un tableau de composition.
- *Utiliser un diagramme de Venn pour représenter la notion d'intersection (données concrètes).*
- *Définir chaque élément d'un ensemble produit (remplir un tableau à double entrée).*
- *Retrouver, dans un cas simple, les deux ensembles sous-jacents à un produit cartésien.*
- *Maîtriser la notion d'intersection. Employer les mots "et" et "non" pour définir les propriétés des éléments correspondant à chaque plage d'un diagramme.*
- *Manipuler la notion d'ensemble produit (éléments concrets).*
- *Jouer sur les ensembles sous-jacents à un ensemble produit pour modifier le cardinal de celui-ci.*
- *Résoudre une équation et réduire une chaîne comportant cinq éléments.*

- 4 - Intersection.
 - Réunion. Consolidation du "ou" inclusif.
 - Complémentaire.
 - Approche de la différence d'ensembles.
 - Emploi intuitif des règles de Morgan.
 - Consolidation du produit cartésien.
 - Approche de la combinatoire.
 - Groupe des permutations dans un ensemble fini. Elaboration d'un tableau de composition. Recherche de groupes isomorphes.
 - 5 - Consolidation des notions d'intersection, de réunion, de complémentaire.
 - Différence d'ensembles.
 - Révision du "ou" inclusif.
 - Consolidation de l'emploi des règles de Morgan.
 - Jeux de combinatoire. Combinaisons et arrangements.
 - Activités portant sur un groupe fini. Recherche d'isomorphismes. Développement des activités portant sur la structure de groupe à propos de notions géométriques.
 - 6 - Emploi des symboles de l'intersection et de la réunion.
 - Approche des propriétés de l'intersection et de la réunion.
 - Utilisation du produit cartésien $E \times F$ et $E \times E$ dans des situations en rapport avec l'âge des élèves.
 - Développement de la notion de combinatoire.
 - Approche de l'idée de probabilité.
 - Structure de groupe. Etude des propriétés dans une situation concrète ou semi-concrète.
- *Maîtriser, au niveau concret, l'intersection et la réunion.*
 - *Utiliser les connecteurs logiques "et" et "ou".*
 - *Dominer la notion d'ensemble-produit.*
 - *Manipuler un groupe de transformations (ordre 4 ou 5).*
 - *Etablir le tableau de composition d'un groupe (ordre 4 ou 5).*
 - *Maîtriser, à l'exclusion du langage formel, les opérations intersection et réunion.*
 - *Dominer la notion de "ou" inclusif.*
 - *Effectuer une combinaison ou un arrangement (ensemble fini de cardinal inférieur à 10).*
 - *Elaborer le tableau de composition des éléments d'un groupe fini.*
 - *Découvrir l'isomorphisme de deux structures (cas simples).*
 - *Employer les symboles $\cap$ et $\cup$*
 - *Effectuer une combinaison ou un arrangement.*
 - *Estimer les chances d'apparition d'un événement dans un cas simple.*
 - *Reconnaître une opération interne.*
 - *Découvrir les propriétés d'une opération et ses éléments remarquables (neutre, symétrique d'un élément, absorbant).*

RELATIONS

- Relation entre éléments d'un ensemble. Notions d'ordre et d'équivalence. Sériation. Double sériation d'éléments complémentaires deux à deux (compensation). Premières représentations fléchées d'une relation entre éléments d'un ensemble.
- Relation d'un ensemble A vers un ensemble B. Représentation fléchée de cette relation. Représentation d'une relation par un tableau à double entrée. Correspondance terme à terme.
- Relation entre éléments d'un ensemble. Revision des notions d'ordre et d'équivalence. Reprise des exercices de sériation simple et double sur des matériels appropriés à l'âge des élèves. Equivalences et sériations numériques. Mise en évidence de la propriété de symétrie d'une relation d'équivalence. Approche de la réflexivité. Réciproque d'une relation d'ordre.
- Relation d'un ensemble A vers un ensemble B. Idée de couple. Analyse de situations préparant la distinction entre différents types de relations. Représentation par un diagramme sagittal ou un tableau à double entrée. Emploi du diagramme sagittal pour l'organisation de données.
- Approche de la notion d'application (ensemble fini). Approche de l'idée d'opérateur.
- Machines à additionner et à soustraire.
- Relation d'ordre et d'équivalence. Représentation d'une relation par un diagramme sagittal, un tableau à double entrée, une liste de couples (éléments concrets puis numériques, géométriques ou sémantiques).
- Réciproque d'une relation.
- Propriétés de symétrie et de réflexivité d'une relation.
- Relation de A vers B. Emploi de diagrammes sagittaux et de tableaux à double entrée pour l'organisation de données. Extraction d'informations à partir des mêmes représentations. Analyse de situations. Comparaison de différents types de relations.
- Notion d'application (ensembles finis d'éléments concrets, ensemble N). Composition de machines à additionner et à soustraire. Approche des machines à multiplier et à diviser.
- Effectuer une double sériation (éléments qualitatifs complémentaires deux à deux).
- Représenter une relation au moyen d'un diagramme fléché.
- Représenter par un diagramme sagittal ou un tableau à double entrée, la relation d'un ensemble A vers un ensemble B.
- Extraire une information de ces mêmes représentations.
- Représenter, au moyen d'un diagramme sagittal ou d'un tableau à double entrée, une relation d'équivalence ou une relation d'ordre portant sur des objets concrets ou sur leur représentation (sans exiger la réflexivité).
- Représenter de la même manière une relation d'équivalence ou d'ordre portant sur des données numériques ($n \leq 40$) ou spatiales (position, éloignement, etc.).
- Représenter une relation (éléments concrets).
- Extraire une information de la représentation d'une relation.
- Etablir la liste des couples correspondant à une relation.
- Composer des machines à additionner et à soustraire ($n \leq 10$).
- Composer deux machines à multiplier ou à diviser.

- 4
- Consolidation des notions antérieures. Exercices portant sur des données verbales, géométriques ou numériques.
 - Symétrie, antisymétrie, réflexivité, transivité
 - Composition de relations.
 - Application. Composition de machines à additionner et à soustraire, à multiplier et à diviser.
- 5
- Exploitation des notions antérieures. Les différents modes de représentation deviennent un instrument de travail pour l'acquisition de connaissances nouvelles.
 - Application. Développement des compositions d'applications (machines) non numériques et numériques.
 - Applications affines. Exploitation de situations de la vie quotidienne.
 - Représentation d'une application dans un système de coordonnées; extraction d'une information à partir du même type de représentation.
- 6
- Consolidation des relations d'ordre et d'équivalence dans des situations appropriées à l'âge des élèves.
 - Distinction entre différents types d'applications.
 - Applications affines. Changement d'unités, pourcentages, déplacements, vitesse, échelle, pente, commerce, etc.
- *Représenter une relation portant sur des éléments numériques ou verbaux.*
 - *Composer deux relations.*
 - *Extraire une information de la représentation d'une relation portant sur des éléments numériques ou verbaux.*
 - *Composer des machines à additionner et à soustraire.*
 - *Composer des machines à multiplier et à diviser ($n \leq 10$).*
 - *Etablir le graphique représentant une application affine.*
 - *Extraire une information d'un graphique.*
 - *Dominer la relation d'ordre et la relation d'équivalence.*
 - *Représenter une application affine par morceaux, dans un système de coordonnées.*
 - *Utiliser l'application affine pour résoudre les problèmes de la vie quotidienne.*

NUMERATION

- Notion de cardinal d'un ensemble. Correspondance terme à terme (autant, plus, moins). Conservation du nombre.
 - Sériations numériques. Double sériation d'ensembles dont le cardinal, lorsqu'ils sont réunis deux à deux, est égal (5,1; 4,2; 3,3; etc.).
 - Approche du calcul en différentes bases. Groupements d'objets divers par 3, par 4, par 5, par 2, par 10. Représentation graphique des groupements.
 - Connaissance des symboles numériques de 0 à 20.
 - Notion de successeur d'un nombre.
 - Introduction des signes : $<$ $>$ $=$ $\neq$
-
- Consolidation de la notion de cardinal et de la conservation du nombre.
 - Sériations numériques (Intervalle 1,2,3,4,10). Notion de successeur et de prédécesseur d'un nombre.
 - Décomposition des nombres jusqu'à 40.
 - Calcul en différentes bases. Groupements de premier et de deuxième ordre. Manipulations et représentations. Codage et décodage du nombre.
 - Approche de la notion d'échange (Equivalence entre un et plusieurs selon une certaine règle).
 - Connaissance des symboles numériques jus'à 100 (base dix).
-
- Sériations numériques (intervalle supérieur à 4).
 - Décomposition des nombres jusqu'à 100 et des nombres se terminant par zéro jusqu'à 1000.
 - Calcul en différentes bases. Représentations, codage et décodage de groupements à partir de manipulations d'objets concrets.
 - Notion d'échange. Ensemble comprenant 3 ou 4 sortes d'éléments. Comparaison de collections. Equivalence et sériation. Elaboration d'un ensemble exhaustif de collections (3 sortes d'éléments).
 - Connaissance des symboles numériques jusqu'à 1000 (en base dix).
 - Introduction des signes $\leq$ $\geq$
-
- Déterminer le cardinal d'un ensemble (maximum 15 éléments).
 - Maîtriser, avec un support matériel, la décomposition des nombres de 0 à 10.
 - Utiliser, avec des nombres inférieurs à 10, les signes $<$ $>$ $=$ $\neq$
 - Trouver le prédécesseur ou le successeur d'un nombre inférieur à 100.
 - Maîtriser la décomposition des nombres jusqu'à 20.
 - Groupier et regrouper des éléments dans des bases diverses. Coder les nombres obtenus.
 - Décoder des nombres de 3 chiffres
 - Comparer des collections comprenant deux sortes d'éléments (échange).
 - Nommer les nombres de 0 à 100 en base dix.
 - Trouver le prédécesseur ou le successeur d'un nombre jusqu'à 1000.
 - Maîtriser la décomposition des nombres jusqu'à 100.
 - Coder et décoder des nombres en différentes bases.
 - Comparer des collections comprenant trois sortes d'éléments (échange).
 - Nommer les nombres de 0 à 1000 en base dix.
 - Utiliser les signes $\leq$ $\geq$

- 4 - Sériations numériques (jusqu'à 10 000).
- Décomposition des nombres jusqu'à 1000 et des nombres se terminant par deux zéros jusqu'à 10 000.
- Calcul en différentes bases. Préparation de la technique de la multiplication et de la division. Consolidation de la soustraction.
- Approche de la notation des puissances liée au codage des groupements.
- Notion d'échange. Consolidation des notions antérieures. Approche de l'idée de récurrence. Elaboration d'un ensemble exhaustif de collections (4 sortes d'éléments au maximum). Liaison entre la dimension de la règle d'échange et le nombre de collections différentes à réaliser.
- Connaissance des symboles numériques jusqu'à 10 000 (en base dix).
- 5 - Notation des puissances.
- Introduction des entiers relatifs.
- Introduction des nombres à virgule en différentes bases.
- Notion de récurrence (échanges). Développement des jeux d'échanges au-delà d'un ensemble à quatre éléments.
- Connaissance des symboles numériques jusqu'à 1 000 000.
- Système métrique. Longueurs, poids, contenances.
- 6 - Entiers relatifs.
- Nombres à virgule.
- Puissances.
- Connaissance des grands nombres.
- Système métrique.
- Trouver le prédécesseur ou le successeur d'un nombre jusqu'à 10 000.
- Maîtriser la décomposition des nombres jusqu'à 1 000.
- Elaborer toutes les collections qui peuvent être réalisées en utilisant trois sortes d'éléments (échange).
- Nommer les nombres jusqu'à 10 000.
- Coder des groupements en différentes bases en utilisant la notation des puissances.
- Maîtriser la notion d'échange (règle récurrente).
- Nommer les nombres jusqu'à 1 000 000.
- Effectuer des transformations simples dans le système métrique.
- Utiliser des nombres positifs et négatifs.
- Comparer des nombres à virgule entre eux.
- Noter un nombre en termes de puissances ou en une somme de produits d'une puissance par un nombre entier ($49 = 7^2$; $6700 = 6 \cdot 10^3 + 10^0$).
- Nommer les symboles numériques jusqu'au milliard.
- Utiliser les données courantes du système métrique (volume excepté)

OPERATIONS SUR LES NOMBRES

- Addition. Manipulations conduisant à la correspondance entre la réunion de deux ensembles disjoints et l'addition de leurs cardinaux.

Equations du type $a + b = .$ et $. = a + b$
Opération inverse : partition d'un ensemble et équation du type $a = . + .$.

- Notion de différence ou de compensation. Equations du type $a + . = b$ $. + a = b$ $b = a + .$
 $b = . + a$
- Approche intuitive de la soustraction. Egalité des écritures $a + . = b$ et $b - a = .$;
 $b = . + a$ et $a = b - .$

- Addition. Révision des notions antérieures. Mise en évidence par manipulations, représentations et codage, de la commutativité et de l'associativité. Elément neutre de l'addition.
- Soustraction. Emploi du signe $-$. Liaison entre équations du type $a + . = b$ et $b - a = .$
- Multiplication. Liaison entre réunion d'ensembles de même cardinal et cardinal d'un produit cartésien. Equations du type :
 $a \times b = .$; $. = a \times b$; $a = . \times .$
- Liaison entre addition et multiplication à propos des groupements en différentes bases.
- Division. Partition d'un ensemble en sous-ensembles de même cardinal.
- Technique des opérations arithmétiques. En différentes bases : addition avec retenue. Soustraction sans retenue.

- Addition. Commutativité et associativité. Elément neutre.
- Soustraction. Non commutativité et non associativité.
- Multiplication. Approche de la commutativité, de l'associativité, de l'élément neutre, de la distributivité par rapport à l'addition. Manipulations et représentations liées au produit cartésien, au diagramme sagittal, à la réunion d'ensembles disjoints ayant même cardinal.
- Division. Approche de la division exacte comme opération inverse de la multiplication.
- Technique des opérations arithmétiques. En différentes bases : addition, soustraction avec retenue, approche de la multiplication d'un nombre de deux chiffres par un nombre d'un chiffre.

- Utiliser l'associativité et la commutativité de l'addition.
- Utiliser les signes $< > = \neq$ dans les opérations du type $a + b \dots c + d$; $a - b \dots c - d$ (dans les 2 cas, la somme ne dépasse pas 40).
- Découvrir, par manipulations, le cardinal d'un ensemble-produit.
- Former, par manipulations, les sous-ensembles équipotents d'un ensemble (cardinal ≤ 40).
- Additionner en colonnes deux nombres dont la somme ne comporte pas plus de trois chiffres.
- Soustraire, sans retenue, deux nombres dont le plus grand comporte trois chiffres.
- Utiliser les propriétés de l'addition.
- Résoudre des équations du type :
 $a + b = .$; $a + b + c = .$;
 $a - b = .$; $a + b < c + d$
 $a - b > c - d$; $a + b = c - d$
(le plus grand nombre apparaissant dans l'équation ne dépasse pas 100)
- Découvrir le cardinal d'un ensemble produit.
- Multiplier, par manipulations, un nombre de deux chiffres par un nombre d'un chiffre.
- Maîtriser la table de Pythagore (produits jusqu'à 40).
- Additionner et soustraire des nombres de trois chiffres

- Révision et approfondissement des propriétés de l'addition et de la soustraction.
- Propriétés de la multiplication et de la division.
- Approche de la division euclidienne.
- Approche intuitive de l'idée des classes de reste modulo n .
- Approche des notions de multiple et de diviseur d'un nombre.
- Technique des opérations arithmétiques. Addition et soustraction (accent mis sur la base dix).
En différentes bases : multiplication d'un nombre par un nombre de deux chiffres.
- Révision des propriétés de l'addition et de la multiplication.
- Division euclidienne (deux chiffres au diviseur). Division par soustractions successives (dividende pouvant aller jusqu'à 10 000).
- Jeux sur les classes de reste modulo n .
- Multiples et diviseurs d'un nombre naturel. Nombres premiers.
- Opérations sur les nombres à virgule.
- Approximation et encadrement du résultat d'une opération.
- Approche de l'addition dans $\mathbb{Z}$
- Technique des opérations arithmétiques. Consolidation de la technique de la soustraction. Multiplication. Division d'un nombre par un nombre de deux chiffres.
- Consolidation des propriétés de l'addition et de la multiplication.
- Utilisation des parenthèses.
- Addition dans $\mathbb{Z}$
- Révision des notions de multiple et de diviseur d'un nombre. Nombres premiers entre eux.
- Développement des notions d'approximation et d'encadrement (grands nombres et nombres à virgule).
- Classes de reste modulo n .
- Approche intuitive de l'ensemble $\mathbb{Q}$
- Consolidation de la technique des quatre opérations arithmétiques.
- *Maîtriser les propriétés de l'addition et de la multiplication (à l'exception de la distributivité).*
- *Résoudre des équations (addition, soustraction, multiplication, division) dans lesquelles le plus grand nombre ne dépasse pas 1000.*
- *Multiplier un nombre par un nombre de deux chiffres en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.*
- *Maîtriser la table de Pythagore (produits jusqu'à 81).*
- *Effectuer une addition ou une soustraction.*
- *Maîtriser les propriétés des opérations arithmétiques.*
- *Trouver les multiples ou les diviseurs d'un nombre.*
- *Encadrer le résultat attendu d'une opération.*
- *Effectuer une addition, une soustraction, une multiplication.*
- *Effectuer une division en utilisant la stratégie de son choix.*
- *Manipuler les propriétés des nombres pour simplifier une opération.*
- *Travailler sur la droite numérique (ensemble $\mathbb{Z}$)*
- *Jouer sur les propriétés des opérations pour effectuer l'approximation ou l'encadrement du résultat d'une opération arithmétique.*
- *Maîtriser les notions de multiple et de diviseur d'un nombre.*
- *Trouver que deux nombres sont premiers entre eux.*
- *Prendre une fraction d'une grandeur.*
- *Maîtriser les quatre opérations arithmétiques sur les nombres entiers et décimaux.*

EXPLORATION DE L'ESPACE

- Notion de position : devant, derrière, entre, etc.
- Notion de voisinage : touche à, proche, lointain.
- Description verbale et représentation d'un itinéraire simple.
- Domaines et frontières : notion d'intérieur et d'extérieur.
- Déplacements sur un réseau (quadrillage). Représentation de ces déplacements.
- Manipulation et reconnaissance d'objets géométriques: surfaces et solides.
- Révision des notions de position.
- Domaines et frontières : intérieur et extérieur de figures superposées.
- Représentation et codage d'un itinéraire.
- Déplacements sur un réseau. Codage et décodage d'un déplacement.
- Formes géométriques simples. Volumes, surfaces, lignes. Reconnaissance des quadrilatères (carré, rectangle, losange). Lignes ouvertes ou fermées. Chemins simples ou complexes.
- Jeux préparant l'idée de symétrie.
- Première initiation à la mesure. Comparaisons qualitatives. Equivalences et sériations de droites. Comparaison de lignes (courbe, droite, brisée). Comparaison de surfaces par superposition.
- Domaines et frontières. Coloriage de cartes (patchwork).
- Codage et décodage d'un itinéraire.
- Déplacements sur un réseau. Codage et décodage. Approche de la notion de coordonnées d'un plan (codage des points d'un quadrillage).
- Approche des propriétés de figures géométriques. Symétrie et rotations.
- Notions de mesure. Comparaison de lignes, de surface, de volumes par des mesures qualitatives.
- Approche de la notion d'encadrement d'une mesure.
- *Utiliser le vocabulaire de position : dessus, dessous, entre etc.*
- *Effectuer, dans un quadrillage, un cheminement donné sous forme codée.*
- *Distinguer intérieur et extérieur, ligne fermée ou ouverte, chemin simple ou non simple.*
- *Nommer un carré, un rectangle, un losange, un triangle, un disque.*
- *Coder et décoder un cheminement dans un quadrillage.*
- *Représenter un itinéraire.*
- *Décrire les principales caractéristiques des figures géométriques simples (nombre de côtés, rapport entre les côtés).*
- *Comparer la longueur de différentes lignes.*
- *Comparer, par pavage, la surface de figures rectangulaires ou carrées.*

- Approfondissement des notions de frontières et de domaines. Jeux sur les chemins et les noeuds.
- Coordonnées d'un réseau.
- Premiers exercices de translation et de symétrie (dans un réseau). Composition de deux symétries ou translations.
- Jeux avec des figures géométriques simples. Rectangle, carré, triangle, disque. Rotation et symétrie.
- Jeux avec des volumes simples. Parallélipipède rectangle, cube, cylindre, tétraèdre. Relation de voisinage entre faces. Développement.
- Mesure des longueurs. Itération de l'unité. Encadrement. Système métrique : m, cm, mm.
- Mesure des surfaces. Comparaisons par recouvrement au moyen de différentes figures. Encadrement.
- Donner les coordonnées d'un point sur un réseau (quadrillage).
- Décrire les caractéristiques des figures simples (côtés, symétrie, diagonales).
- Mesurer des longueurs.
- Comparer la mesure de surfaces quelconques.
- Translations, symétries, rotations dans un réseau. Composition de ces opérations.
- Coordonnées d'un point dans un plan (nombres positifs et négatifs).
- Figures planes. Quadrilatères, triangles. Axes de symétrie, diagonales, angles, côtés, hauteurs. Construction de parallèles, de perpendiculaires, d'angles.
- Construction de figures (cas simples).
- Mesure des aires. Quadrillage et recouvrement.
- Activités portant sur le développement et la mesure de solides.
- Effectuer une translation, une symétrie ou une rotation dans un réseau.
- Donner les coordonnées d'un point dans un plan.
- Construire des parallèles, des perpendiculaires, des angles.
- Construire des triangles et des quadrilatères (cas simples où l'on connaît la base, un angle et un côté).
- Mesurer des surfaces (mesures quadrilatères) par encadrement.
- Développement des problèmes de voisinage et de cheminement.
- Composition de translations, de symétries et de rotations. Liaison avec la notion de structure de groupe.
- Révision de la notion de coordonnées.
- Figures planes. Triangles, quadrilatères, pentagone régulier, hexagone régulier, octogone régulier, disque. Symétrie, diagonales, angles, côtés, hauteurs, diamètre, rayon, circonférence.
- Construction des mêmes figures.
- Calcul de l'aire des polygones.
- Notion de volume. Développement et mesure.
- Première étude de quelques polyèdres.
- Composer des translations, des symétries et des rotations entre elles.
- Employer un système de coordonnées.
- Utiliser la règle métrique, le rapporteur, l'équerre, le compas pour la construction de figures.
- Construire des figures planes.
- Déterminer les propriétés des figures planes.
- Calculer l'aire d'une figure plane.

10.4 Moyens d'enseignement

La question des moyens d'enseignement pourrait apparaître, à qui ne connaît pas bien l'enseignement, comme une affaire mineure par rapport aux problèmes de fond que constituent les contenus et les méthodes. En réalité, ces moyens conditionnent dans une large mesure la réussite ou l'échec d'une réforme. En effet, passé le temps du recyclage, le maître n'aura guère d'autres sources, mise à part sa propre expérience et ses facultés créatrices, que les matériels et les documents fournis par l'organisation scolaire. Il faut donc veiller à ce que les moyens d'enseignement mis à la disposition du maître correspondent aux intentions sous-jacentes à la réforme et en favorisent la réalisation et la maintenance.

Parmi les moyens d'enseignement, nous rangerons les guides méthodologiques, les manuels, les matériels, les appareils audio-visuels, l'enseignement assisté par ordinateur. En ce qui concerne la réforme faisant l'objet de notre recherche, les deux derniers ne seront pas retenus. Le premier apprentissage de la mathématique implique l'action personnelle de l'enfant ; l'emploi du film, de la télévision, ou d'autres moyens similaires ne semblent guère fournir qu'une façon de renforcer la motivation pour un apprentissage. Quant à l'enseignement assisté par ordinateur, il représente probablement l'un des éléments constitutifs des réformes futures mais il n'y a guère de chances que, dans les dix prochaines années, il acquière en Suisse romande un caractère opérationnel pour l'école élémentaire. Les trois éléments qui, dans l'immédiat, jouent un rôle important pour le développement et la généralisation d'un nouveau type d'enseignement de la mathématique sont donc les guides méthodologiques – ce qu'on appelle parfois le livre du maître –, les manuels destinés aux élèves et les matériels servant de support aux activités.

La réalisation d'un guide méthodologique soulève de nombreux problèmes. En premier lieu, l'ouvrage doit être agréé par le corps enseignant afin que ce dernier le considère comme un véritable instrument de travail. Le guide méthodologique doit faciliter la préparation des leçons, être l'auxiliaire quotidien du maître, lui apporter des suggestions et des éclaircissements, lui donner le fil conducteur de son action, établir les liaisons indispensables entre les différentes notions et les différents types d'activités prévus par le plan d'études. Le risque est grand d'en faire un ouvrage rébarbatif que le maître parcourt en début d'année, si ce n'est en début de carrière, et qu'il n'éprouve plus le besoin d'ouvrir par la suite. En second lieu, la méthodologie, tout en guidant le maître et en facilitant sa tâche, ne doit en aucun cas constituer un carcan et l'empêcher de donner libre cours à son tempérament, de se réaliser pleinement, de s'exprimer selon son génie propre.

Le guide méthodologique constituera un canevas sur lequel l'enseignant pourra broder à sa guise. Il présentera l'ordre de succession des notions, définira le moment à partir duquel celles-ci sont abordées, donnera, pour chacune d'elles, plusieurs idées de présentation et de nombreuses suggestions de recherches et d'activités à effectuer en enseignement collectif, par groupes ou individuellement.

Nous n'insisterons jamais assez sur la variété et la diversité qui doit régner dans l'enseignement de chaque notion. En simplifiant beaucoup les choses, nous pourrions dire que l'acte d'enseignement est composé d'un émetteur, le maître, d'un récepteur, l'élève, entre lesquels passe un message. Or, celui-ci n'a pas forcément le même sens pour l'émetteur et pour le récepteur, sans compter les phénomènes venant perturber la transmission même du message. D'autre part, chacun des élèves d'une classe présente ses particularités réceptrices. Il est donc exclu d'envisager un message-type applicable par tous les maîtres et recevable par tous les élèves de la même manière. Au contraire, ce qu'il faut rechercher, c'est la multiplicité des formes pouvant servir à la transmission d'une seule notion. Le maître choisira celles qui lui paraissent convenir, de façon que, par la multiplication des angles d'approche, il augmente la probabilité des chances que chacun des élèves comprenne exactement la signification du message. Il n'existe donc pas la méthode, mais une multitude de manières et de moyens différents qui permettront de placer une classe donnée, avec un maître donné, dans la situation d'apprentissage optimale, tout l'art et la science de l'enseignant résidant dans le choix des cheminements et des moments opportuns.

Le problème des manuels est encore plus critique. Si l'on se reporte à l'enseignement de type classique, que ce soit de l'arithmétique ou de la géométrie, il est facile de trouver, dans un grand nombre de pays ou de régions, des types d'enseignement entièrement conditionnés par un manuel et dans lesquels le rôle du maître consiste presque uniquement en un découpage des problèmes en tranches hebdomadaires. La présence, dans ces manuels, d'un embryon de présentation ou d'un résumé abstrait de la règle, conduit inévitablement le maître à attacher plus d'importance aux exercices d'application qu'à la construction de la notion. De plus, souvent, une progression trop rigoureuse du manuel tend à priver le maître de sa liberté d'action dans le choix d'activités et d'exercices adaptés à ses élèves.

En poussant les choses à l'extrême, le manuel paraît, en regard d'une méthodologie de qualité, plus nocif qu'utile. Néanmoins, sa suppression ne peut guère être envisagée. Il est, en quelque sorte, un mal

nécessaire. On conviendra qu'il n'est ni possible ni souhaitable de demander à un instituteur ou une institutrice, par ailleurs chargé d'assumer l'ensemble des disciplines de l'enseignement, de préparer tous les exercices dont ils estiment avoir besoin pour leurs élèves. En outre, il est évident qu'un certain nombre de ces travaux pourront sans inconvénient être employés sous la même forme dans la plupart des classes. Il faut enfin qu'un enseignant relativement moins intéressé à la mathématique qu'à d'autres disciplines trouve, dans le manuel, une matière assez riche et assez abondante pour qu'elle lui permette, sans trop de difficultés, de placer ses élèves dans une situation d'apprentissage favorable.

Les considérations qui précèdent nous ont conduit à élaborer d'une part, une série de notes méthodologiques à l'intention du corps enseignant et d'autre part, des fascicules d'exercices. Les exercices destinés aux élèves constituent chaque fois l'aboutissement, le prolongement où le moyen de contrôler l'assimilation d'une notion qui, par ailleurs, a fait l'objet d'un apprentissage basé sur la recherche, la manipulation d'objets concrets, le travail en groupes. C'est donc seulement lorsque la notion a été dégagée des situations concrètes pour être abstraite et généralisée que l'élève aura l'occasion de prouver, dans un problème qu'il doit résoudre individuellement, s'il a véritablement compris la notion en question. Ainsi le manuel constitue en quelque sorte le lieu où l'enfant, livré à lui-même, montre par la réalisation de certaines performances où se situe le niveau de sa compétence et indique par là à son maître quelles recherches, quelles activités, quelles notions il est à même d'aborder dans les jours qui suivront.

Le matériel d'enseignement pose, lui aussi, un certain nombre de problèmes. Depuis l'essor de la mathématique moderne à l'école primaire, le marché pédagogique est inondé de jeux de toutes sortes, de gadgets, de collections de figures, de formes, d'animaux, qui tous prétendent être la panacée dans le champ qu'ils recouvrent. Il est difficile d'effectuer un choix dans tout ce matériel. Dans la première phase de l'expérience, les blocs logiques de Dienes-Hull ont été largement utilisés. Ils constituent, pour le maître aussi bien que pour les élèves, un excellent matériel d'initiation aux notions ensemblistes. Deux problèmes ont été cependant soulevés par l'emploi de ce matériel. Tout d'abord, sa qualité même et sa facilité d'emploi font que le maître éprouve une tendance à ne pas utiliser d'autres matériels, ce qui peut conduire les élèves, dans certains cas, à un apprentissage des blocs logiques et non à celui de la logique. Le second problème est d'ordre psychologique. Si le même matériel apparaît dans toutes les classes du début à la fin de la scolarité primaire, les enfants éprouvent, à un moment donné, un sentiment de saturation. Ce sentiment est particulièrement marqué lors du passage de la première année, rattachée à l'école

enfantine, à la deuxième qui coïncide généralement avec un changement d'école. Les enfants passent "à l'école des grands". Une certaine déception se fait jour lorsqu'ils y retrouvent un matériel déjà trop connu. C'est la raison pour laquelle les blocs logiques ont été remplacés, de 4 à 7 ans, par d'autres collections similaires, souvent élaborées par les maîtresses enfantines en liaison avec un centre d'intérêt touchant l'ensemble des disciplines. Les blocs logiques font partie du matériel des classes de deuxième à quatrième soit de 7 à 10 ans mais, dans ces degrés aussi, d'autres collections d'objets construites selon le même principe donnent à l'enfant l'occasion d'exercer sa logique et d'effectuer des classifications multiplicatives sur des supports constamment renouvelés.

Un autre type de matériel soulève le même genre de problème. Il s'agit de celui que l'on peut regrouper sous l'étiquette générale de matériel multibase. Le fait d'équiper une classe de ce genre de matériel donne parfois, avec des enfants encore très jeunes, des résultats qui paraissent à première vue stupéfiants. On constate cependant trop souvent que la performance est exclusivement liée au matériel et que le simple fait de remplacer ce dernier par un autre du même genre provoque une chute de rendement très nette. Il ne paraît guère possible de dégager dans de bonnes conditions un concept, d'abstraire une idée, de généraliser une loi si l'on se limite à un seul matériel, aussi bon soit-il. Cette remarque nous conduit à faire mention d'un autre matériel qui a été largement répandu en Suisse romande et ailleurs : les réglettes en couleurs de G. Cuisenaire. En lui-même, ce matériel est intéressant et peut donner lieu à toutes sortes d'exercices. Mais le tort qu'ont parfois eu ses utilisateurs a été de le considérer comme le matériel unique répondant à tous les besoins et de transformer ainsi ce qui au départ n'était que matériel en une quasi-méthode devant répondre à toutes les situations et permettre l'apprentissage de n'importe quelle notion.

La condition essentielle pour l'utilisation d'un support matériel est que celui-ci soit aussi varié que possible. Lorsque le matériel est trop connu, l'enfant, au lieu d'appliquer une stratégie lui permettant d'inventorier la situation et d'en abstraire les concepts généraux, cherche à reproduire des conduites antérieures qui ont réussi dans d'autres situations et ne parvient plus à élaborer le modèle logico-mathématique adéquat. A la limite, nous dirons que chaque leçon de mathématique devrait placer l'enfant en face d'une expérience nouvelle, constituer pour lui un sujet d'étonnement, l'obliger à une analyse attentive en réduisant au minimum le recours à la mémorisation et en obligeant le sujet à une reconstruction constante de l'édifice logico-mathématique.

11. LE PROBLEME DE L'EVALUATION

11.1 Position du problème

L'évaluation des effets d'un enseignement représente une préoccupation relativement nouvelle dans le monde de la pédagogie. Bien sûr, la notion d'examen est fort ancienne mais, pendant très longtemps, le seul but des examens a été le classement des élèves, sans que la réussite ou l'échec n'implique une remise en question de l'acte éducatif lui-même. Tout au plus, les examens ont-ils eu pour effet secondaire un jugement porté sur le maître par ses supérieurs hiérarchiques. Il faut bien reconnaître que la recherche pédagogique n'a pas encore acquis droit de cité partout et que, par la faute de ses protagonistes peut-être, elle apparaît souvent, aussi bien aux yeux de nombreux enseignants qu'à ceux du monde politique, comme un luxe coûteux.

"L'école est facilement conçue comme une usine dont la production est estimée au nombre de pièces produites, ici de diplômés, parce qu'il est aisé de compter ces diplômés. On s'intéresse beaucoup moins à la qualité des pièces que l'on jette ainsi sur le marché; et ceci d'autant plus aisément que, en ce domaine des hommes, on ne voit point aussi facilement que lorsqu'il s'agit de machines, les manques et les pailles dans le métal....

... C'est pour cela qu'en ce domaine de la pédagogie, toutes les idéologies, même les plus folles, peuvent avoir libre cours et auront libre cours tant que nous n'aurons point établi de solides garde-fous scientifiques." (54)

Il serait facile de citer un certain nombre de réformes pédagogiques qui ont passé en leur début pour des panacées et se sont avérées par la suite n'être que feux de paille. Il paraît plus utile d'essayer de définir quelques-unes des raisons de cet état de fait. L'une d'entre elles tient certainement dans l'absence d'une formation professionnelle théorique suffisante du corps enseignant. L'instituteur, au bénéfice d'un diplôme de fin d'études secondaires, reçoit principalement une formation pratique qui lui permet de dominer le contenu de ce qu'il enseigne et d'appliquer des modèles d'action empiriques. Il lui manque de toute évidence une formation théorique le conduisant à réfléchir sur l'acte pédagogique, aussi bien sur le plan des fondements de la discipline à enseigner que de la psychologie génétique, de la psychologie sociale et de la psychopédagogie. Parallèlement les cadres scolaires, choisis pour leurs qualités humaines, leur expérience pratique de la classe, leurs dons d'organisation et d'administration, n'ont souvent ni le temps ni le goût de se consacrer à une analyse théorique de l'acte d'enseignement.

On n'est, semble-t-il, pas toujours conscient du fait que la formation professionnelle d'un enseignant primaire ou secondaire est souvent bien plus brève que celle d'un travailleur manuel et l'on confond fréquemment l'acquisition des connaissances générales avec l'apprentissage de la profession d'enseignant. Une autre raison, trop souvent évoquée pour que nous nous y arrêtons largement, tient dans la perception qu'a l'opinion publique de l'enseignement. Les parents, qui sont eux-mêmes par nature éducateurs, reconnaissent rarement au maître, au professeur, la qualification professionnelle qu'il ne leur viendrait jamais à l'idée de mettre en doute chez l'artisan, l'ingénieur ou le médecin. D'une manière générale, l'enseignement est considéré comme un art, comme une activité difficile au niveau des relations humaines, mais non comme une science ayant ses lois et ses méthodes.

La troisième raison sera imputée aux spécialistes de ce que l'on a longtemps appelé la pédagogie expérimentale avant de parler de recherche pédagogique. Faute de modèles théoriques suffisants, les pédagogues expérimentalistes se sont en général bornés à des études de rendements quantitatifs portant sur des domaines très restreints. Ces analyses descriptives, pour intéressantes qu'elles fussent, ont rarement abouti à des modifications fondamentales de l'enseignement. En outre, elles n'ont presque jamais pris en compte la totalité de l'action pédagogique et nous n'avons guère d'exemple d'innovations scolaires dûment et scientifiquement contrôlées de bout en bout.

Il n'est pas possible, en effet, de justifier une réforme pédagogique par un accroissement des taux de rendement concernant une notion particulière.

Dans un domaine aussi complexe, tout changement agit sur l'ensemble du système. C'est donc ce dernier qui devrait être analysé dans tous ses aspects lorsque l'on cherche à déterminer l'impact d'une modification. Notre recherche n'échappe d'ailleurs pas à ce reproche mais nous avons essayé de multiplier les points de vue et de recueillir le plus possible d'information.

11.2 Les différentes formes d'évaluation

La formulation des données ci-dessus en termes d'objectifs précis, de comportements observables, n'est pas aisée. Cependant, c'est la définition des critères qualitatifs ou quantitatifs permettant de déterminer si ces objectifs sont atteints qui soulève le plus de difficultés. Le choix de ces critères est inévitablement entaché de subjectivité et les cadres de références sur lesquels s'appuient les enseignants, les mathématiciens, les psychologues, les parents, les employeurs, sont fort différents les uns des autres. Il en découle fréquemment une situation conflictuelle, source d'innombrables controverses, dans laquelle l'expérimentaliste a bien du mal à conserver toute l'objectivité souhaitable. La tentation est grande - elle est parfois même inconsciente - de construire des instruments de telle manière qu'ils fournissent à coup sûr une confirmation des hypothèses avancées.

C'est la raison pour laquelle nous avons été conduits d'une part à définir de cas en cas, pour chaque contrôle, les objectifs visés et les critères d'évaluation, d'autre part à multiplier les observations afin de tenter plus une description de la réalité observée qu'une évaluation du rendement de l'enseignement.

Une dernière source de difficultés doit encore être signalée : elle concerne l'obligation qui nous est faite de créer la plupart des instruments d'évaluation au fur et à mesure du déroulement de la recherche. De ce fait, il faut en même temps tester les élèves et la validité des instruments qui servent à évaluer leurs aptitudes et leurs connaissances.

L'évaluation prendra donc des formes différentes, chacune d'elles tentant de cerner un aspect des choses :

a. Evaluation interne.

Un programme d'enseignement ayant été établi et des objectifs à court terme fixés, il s'agit de déterminer la proportion des élèves qui ont atteint ces objectifs et d'expliquer, si faire se peut, les causes éventuelles d'échecs.

b. Evaluation "défensive".

Une modification de l'enseignement suscite toujours des inquiétudes et des réactions des autorités scolaires, des parents,

de l'opinion publique. Les enfants du groupe expérimental ne seront-ils pas défavorisés par rapport aux autres élèves : ces enfants ne sont-ils pas considérés comme des cobayes ?

L'évaluation "défensive" cherche à minimiser les risques éventuels de sacrifier certains aspects de l'enseignement au profit de la réforme. Elle vise aussi à rassurer tous ceux - parents, maîtres, pouvoirs publics - qui pourraient craindre que l'expérience diminue les chances scolaires d'une partie des élèves.

La déontologie de la pédagogie n'autorise pas le chercheur, même s'il est persuadé d'avoir raison, à transformer l'enfant en cobaye, à négliger les exigences imposées par la suite de la carrière scolaire de l'élève, ou à former des sujets qui seraient virtuellement adaptés à une société hypothétique d'après-demain mais qui se trouveraient désorientés dans le contexte socio-professionnel qui les attend au sortir de l'école.

c. Evaluation clinique.

L'interrogation clinique des sujets en difficulté complète l'évaluation collective. Elle renforce son côté explicatif. Elle permet aussi de corriger certains biais apportés involontairement par l'enseignant.

Elle a lieu, en général, à la demande du maître qui signale les élèves lui paraissant en difficulté. L'enfant est interrogé individuellement par une équipe de psychologues qui tente de déterminer les causes d'échecs. Si les observations effectuées permettent de suggérer une ligne d'action au maître, elles sont surtout utiles pour le groupe qui anime la recherche, soit par les explications qu'elles apportent, soit par les approfondissements et les essais qu'elles suscitent.

On peut classer aussi dans l'évaluation clinique les interventions des assistantes pédagogiques qui, dans la situation scolaire habituelle, font travailler les élèves d'une classe et mettent ainsi souvent en évidence des problèmes qui se situent soit au niveau du contenu mathématique, soit dans la transmission du message entre les animateurs et les enseignants. C'est ainsi que, à un moment donné, une profonde modification de l'approche de la multiplication a été introduite à la suite d'une observation fortuite dans une classe.

Les résultats de ces analyses transparaîtront derrière l'esquisse d'une méthodologie qui constituera la dernière partie de l'ouvrage.

d. Evaluation comparative longitudinale.

Deux groupes comparables sont constitués au début de la scolarité. L'un participe à l'expérience, l'autre reçoit un enseignement de type traditionnel. Ces deux groupes sont soumis à des tests et des épreuves de connaissances périodiques.

C'est sur le plan du raisonnement logico-mathématique, étant donné l'importance qui lui est accordée dans le nouveau plan d'études, que l'on va opérer. Très schématiquement, la différence entre les deux groupes pourrait être exprimée de la façon suivante :

L'enseignement traditionnel de l'arithmétique a pour objectif principal l'acquisition de connaissances : les quatre opérations, la mesure, les notions de vente et d'achat, le calcul des aires et des volumes, etc... Dans le cadre des exercices visant à l'assimilation de ces connaissances, l'enfant rencontre parfois des situations dans lesquelles il trouve l'occasion d'exercer son raisonnement logico-mathématique.

Dans le groupe expérimental, l'objectif essentiel consiste à placer l'enfant dans des situations favorables à la construction et au développement de ce raisonnement. L'acquisition des connaissances, tout en conservant son importance passe au second plan.

L'évaluation comparative devra donc répondre à deux questions :

- L'élève soumis à un enseignement expérimental a-t-il acquis les connaissances dont il a besoin au même titre que l'enfant astreint à un enseignement de type classique ?
- Un enseignement axé sur la construction du raisonnement logico-mathématique a-t-il un effet favorable, ou ce raisonnement n'est-il que le produit d'une lente maturation de l'intelligence peu affectée par l'enseignement, quel qu'il soit ?

e. Evaluation des transferts.

Le groupe expérimental est testé, soit par rapport au groupe témoin, soit par rapport à la population scolaire totale, dans d'autres matières que la mathématique.

Dans l'esprit des promoteurs de la réforme, l'enseignement de la mathématique constitue l'un des piliers du développement de l'intelligence.

Si tel est bien le cas, l'amélioration de cet enseignement devrait conduire à un accroissement des performances dans d'autres disciplines.

Il serait extrêmement utile d'engager une recherche approfondie dans cette direction. Malheureusement, l'ampleur de l'enquête nous a contraints à opérer un choix et nous avons dû limiter les investissements concernant cet aspect du problème.

Néanmoins, il a été possible de recueillir un certain nombre d'informations prévues à d'autres fins. C'est ainsi que, chaque année, les sujets des groupes expérimentaux ont obtenu des résultats significativement supérieurs à ceux de la population scolaire totale, lors des épreuves générales primaires qui, en l'absence d'examens, servent de moyen de régulation pour l'enseignement.

Une différence sur le plan de la grammaire, de la géographie, voire de la lecture était attendue mais nous avons eu la surprise de constater que, même en orthographe où l'on ne peut pas dire que la logique soit reine, une amélioration substantielle se dessinait. Il semble bien que l'élève, en présence d'une difficulté orthographique est capable, mieux qu'auparavant, de faire l'inventaire des possibilités qui lui sont offertes et de choisir la réponse la plus probable.

f. Evaluation "finale".

L'évaluation s'effectue au terme de la période considérée. Elle tente de mesurer l'ensemble des modifications apportées par la réforme.

Ainsi que nous l'avons précisé, la mise en place de la réforme de l'enseignement s'effectue sur une durée d'au moins cinq ans. Or, c'est dans la troisième volée, alors que les choses étaient loin d'être fixées, que les deux groupes expérimental et témoin ont été constitués. Il aurait donc fallu, quelques années plus tard, répéter la comparaison. Cependant, le mode d'extension retenu rendait la chose impossible. Il n'y avait plus moyen, à ce moment, de constituer un groupe témoin équivalent au groupe astreint à l'enseignement de la mathématique. C'est la raison pour laquelle un autre voie a été choisie.

L'hypothèse a été faite - et ceci constitue une faiblesse qui peut prêter à discussion - que deux volées d'élèves, si l'on prend la précau-

tion d'étendre l'enquête à 1500 élèves pour que le nombre des maîtres dépasse 50, prises à trois ans de distance, ne devraient pas être différentes.

En fonction de cette hypothèse, un large sondage sera entrepris auprès de 1500 sujets qui arriveront à la fin de la scolarité primaire en ayant suivi un enseignement complet de type classique.

L'enquête prendra en considération les variables habituelles : sexe, milieu socio-économique, retard scolaire. Elle portera sur le raisonnement, les connaissances et les aptitudes en mathématique, l'acquisition de la langue, la créativité.

Deux ans plus tard, la même enquête concernera un groupe de 1500 élèves qui auront, eux, été soumis au nouvel enseignement de mathématique durant toute leur scolarité élémentaire. La comparaison des résultats observés devrait permettre de déterminer avec quelque exactitude les effets réels d'un enseignement basé sur ce qu'on appelle, souvent à tort, les mathématiques modernes.

Dans cet ouvrage, nous n'aborderons que l'évaluation interne. L'évaluation longitudinale de la réforme, qui s'étend sur les années 1968 à 1975, fera l'objet d'une publication ultérieure.

12. L'EVALUATION INTERNE

L'évaluation interne prend trois formes. En premier lieu, les élèves sont soumis, en moyenne trois fois par année, à une épreuve collective de type mosaïque, qui recouvre un échantillonnage des notions abordées au cours du trimestre.

En début ou en fin d'année scolaire, l'épreuve tente de déterminer le niveau atteint par les élèves. La distribution des résultats est alors très proche de la courbe normale. En cours d'année, l'épreuve cherche plutôt à mesurer l'acquisition du bagage minimum fixé par le plan d'études afin de sécuriser le corps enseignant. De ce fait, les courbes obtenues ont généralement la forme en J caractéristique des épreuves scolaires.

Mais, si le score brut représente une indication intéressante pour la comparaison des sujets entre eux, éventuellement pour la comparaison des classes, il n'a que peu d'intérêt intrinsèque en raison des difficultés déjà mentionnées dans la détermination des critères. En revanche, l'analyse détaillée des items procure une information bien plus utile. C'est elle qui conditionne les ajustements successifs de l'enseignement.

Cette analyse, effectuée par les moyens électroniques, permet d'obtenir le rendement de chaque item ainsi que le rendement moyen du groupe d'items reliés à une même notion, ceci pour chaque classe et pour la population totale. Le maître reçoit donc, pour chacun de ses élèves, le score brut obtenu et la mention de réussite ou d'échec aux différentes notions qui composent le test.

Pour les responsables de l'expérience, l'analyse des items par classes est particulièrement utile. En effet, si un item obtient un indice de rendement moyen relativement faible, cela peut recouvrir deux situations assez différentes. Il est possible que la notion soit trop difficile ou qu'elle soit abordée d'une manière inadaptée à l'âge des sujets; dans ce cas, le rendement sera faible d'une façon uniforme dans toutes les classes. Mais il se peut aussi que la médiocrité de la moyenne tienne au fait que l'item est brillamment réussi dans certaines classes et complètement manqué dans d'autres; c'est alors par une collaboration étroite entre les initiateurs de la réforme et les enseignants que l'on tentera d'élucider les raisons de certains échecs et de procéder aux corrections d'ordre méthodologique qui s'imposent.

En second lieu, des études plus fouillées tentent de faire le point, à travers les différentes classes d'âge, sur le degré d'assimilation d'une notion particulière. Citons, à titre d'exemple, une batterie d'épreuves qui cherche à mettre en lumière les difficultés rencontrées par les élèves dans l'utilisation des différents modes de représentation graphique d'un classement.

En troisième lieu, l'évaluation interne s'effectue par l'intermédiaire de questionnaires adressés au corps enseignant. Il serait inconcevable de mettre en place une nouvelle méthodologie sans que les praticiens ne soient consultés systématiquement. Les questions portent sur les programmes, la méthode, la didactique, l'organisation du travail. Une attention particulière est vouée à la perception subjective, par le maître, de sa propre action éducative. Pour que le climat de la classe soit favorable, l'enseignant doit se sentir à l'aise dans sa tâche et adhérer pleinement aux objectifs qui lui sont fixés ainsi qu'au choix des voies et des cheminements qui permettront de les atteindre.

On nous pardonnera, dans une recherche qui est planifiée sur une durée de plus de dix ans, de faire état de résultats intermédiaires et de ne pas attendre l'achèvement de l'oeuvre avant de tirer un certain nombre de conclusions. Nous l'avons dit, l'enjeu est trop important et le matériau humain trop précieux pour que nous ne fassions pas, de moments en moments, une analyse aussi précise que possible afin d'apporter dans les nouvelles volées scolaires les modifications et les ajustements qui paraissent nécessaires, tout en sachant pertinemment qu'ils seront à leur tour suivis d'autres modifications et d'autres ajustements au fur et à mesure de l'avancement de travaux qui, de toute manière, risquent fort de prendre un caractère permanent en raison du rythme de plus en plus rapide avec lequel évolue la société.

12.1 Les épreuves internes : résultats généraux

Il serait fastidieux et inutile de décrire par le menu les 58 épreuves auxquelles les sujets des différents degrés ont été soumis. Les travaux de contrôle des deux premières années d'expérience ont d'ailleurs fait l'objet de rapports détaillés (55). C'est donc principalement les épreuves des deux dernières années qui permettront de confronter les intentions et la réalité. Le tableau ci-dessous fournit les éléments essentiels des données recueillies.

n	=	nombre de sujets soumis à l'épreuve,
max.	=	nombre maximum de points,
m	=	moyenne,
s	=	écart-type (sigma),
var	=	marge de variation (dernier et premier sujet),
rdt	=	rendement moyen de l'épreuve en %.

2e	n	max	m	s	var	rdt
Nov. 70	1518	34	24, 1	6, 90	4-34	71 ‰
Mars 71	1457	24	18, 5	4, 58	3-24	77 ‰
Juin 71	1523	29	19, 4	5, 40	1-29	67 ‰
Déc. 71	1659	21	17, 0	3, 72	4-21	81 ‰
Mai 72	1670	38	29, 7	6, 23	10-38	78 ‰

3e	n	max	m	s	var	rdt
Nov. 70	1017	35	25, 8	6, 92	7-35	74 ‰
Mars 71	1022	29	20, 9	4, 92	7-29	72 ‰
Juin 71	1016	32	20, 7	5, 92	6-32	65 ‰
Oct. 71	1672	27	18, 6	5, 44	4-27	69 ‰
Déc. 71	1662	19	15, 7	2, 95	5-19	83 ‰
Mai 72	1541	55	40, 2	9, 28	12-55	73 ‰

4e	n	max	m	s	var	rdt
Nov. 70	573	43	30, 5	6, 71	11-43	71 ‰
Mars 71	615	25	18, 0	4, 46	5-25	72 ‰
Juin 71	630	32	19, 6	6, 08	4-32	61 ‰
Oct. 71	1166	27	15, 3	5, 02	1-27	57 ‰
Déc. 71	1164	26	18, 4	5, 61	2-26	71 ‰
Mai 72	1209	50	35, 0	9, 28	8-50	70 ‰

5e	n	max	m	s	var	rdt
Déc. 70	287	42	24, 4	8, 61	3-42	58 ‰
Mars 71	231	27	12, 9	5, 73	2-27	48 ‰
Oct. 71	664	29	19, 2	5, 54	2-29	66 ‰
Déc. 71	655	26	15, 5	5, 31	4-26	60 ‰
Mai 72	646	44	30, 4	7, 88	8-44	69 ‰

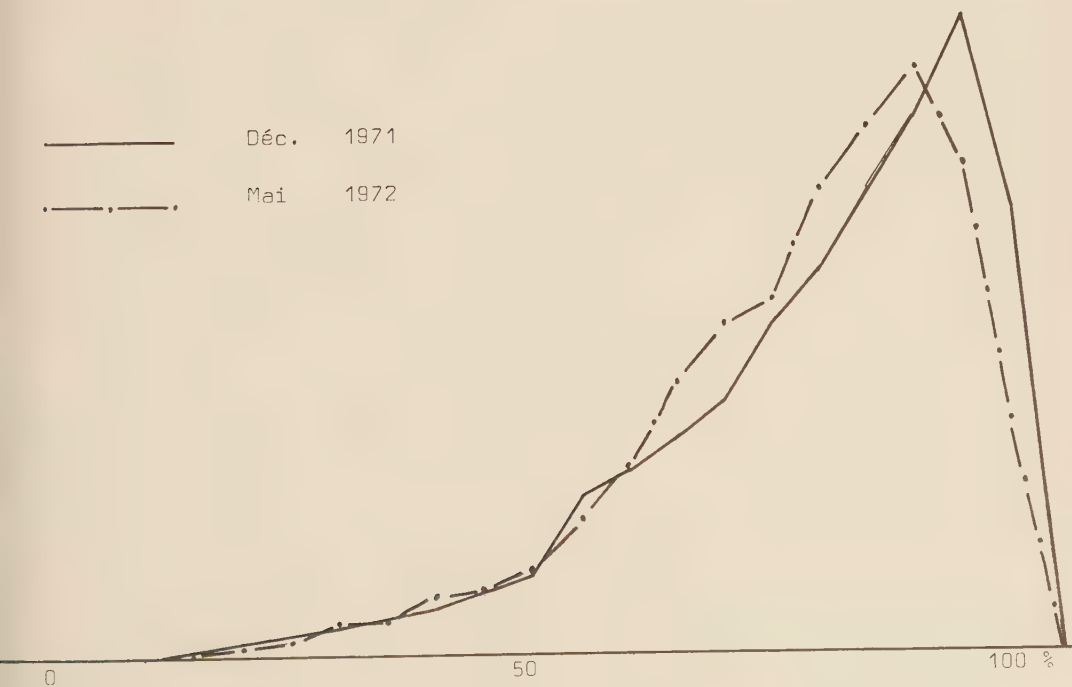
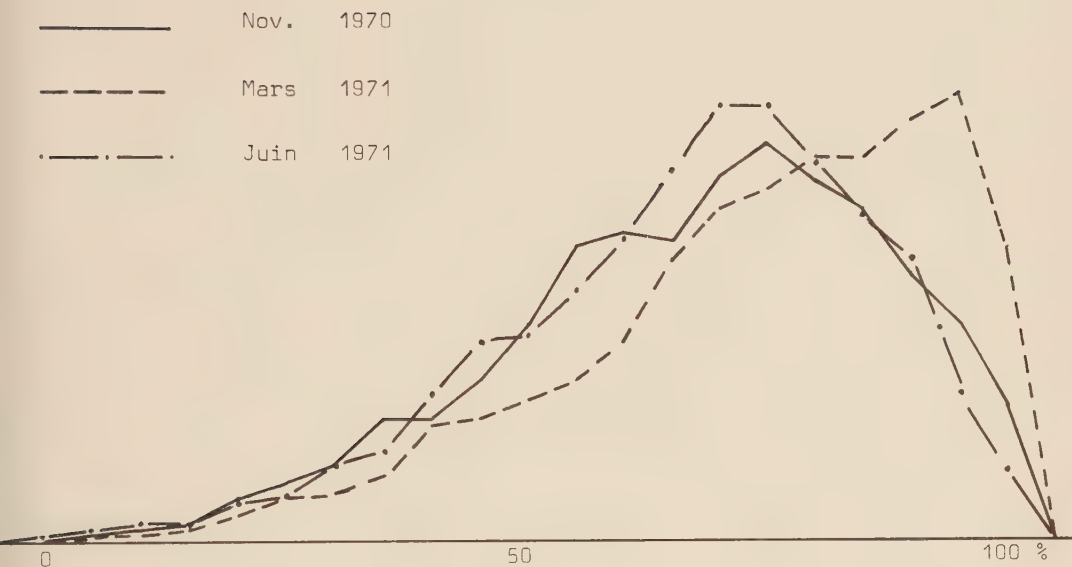
Ces données appellent un certain nombre de commentaires. La fluctuation parfois importante du nombre des élèves au cours d'une même année scolaire doit être imputée au fait que, travaillant sur une large population, nous avons subi les aléas de la vie scolaire. Lors de chaque sondage, quelques classes n'ont pas pu être soumises à l'épreuve.

Bien que les contrôles aient eu lieu jusqu'en sixième année, les paramètres concernant ce degré ne sont pas mentionnés. Il est encore trop tôt pour en tirer des conclusions solides.

Les variations de rendement doivent être imputées à deux raisons. La première tient à la difficulté déjà relevée qui provient de l'obligation dans laquelle nous nous trouvons de construire des épreuves de contrôle sans pouvoir les essayer. La seconde découle d'une définition parfois insuffisante des objectifs. On relèvera que, peu à peu, les valeurs obtenues se stabilisent, chaque travail permettant d'améliorer le suivant. Afin de permettre une meilleure vue d'ensemble de la forme des distributions obtenues, celles-ci ont toutes été ramenées à une même échelle dans laquelle la marge de variation est donnée en pourcentage de réussite. Le nombre des sujets a été lui aussi rendu identique dans chaque distribution par un simple calcul de proportion.

2e ANNEE

Distribution des résultats



3e ANNEE

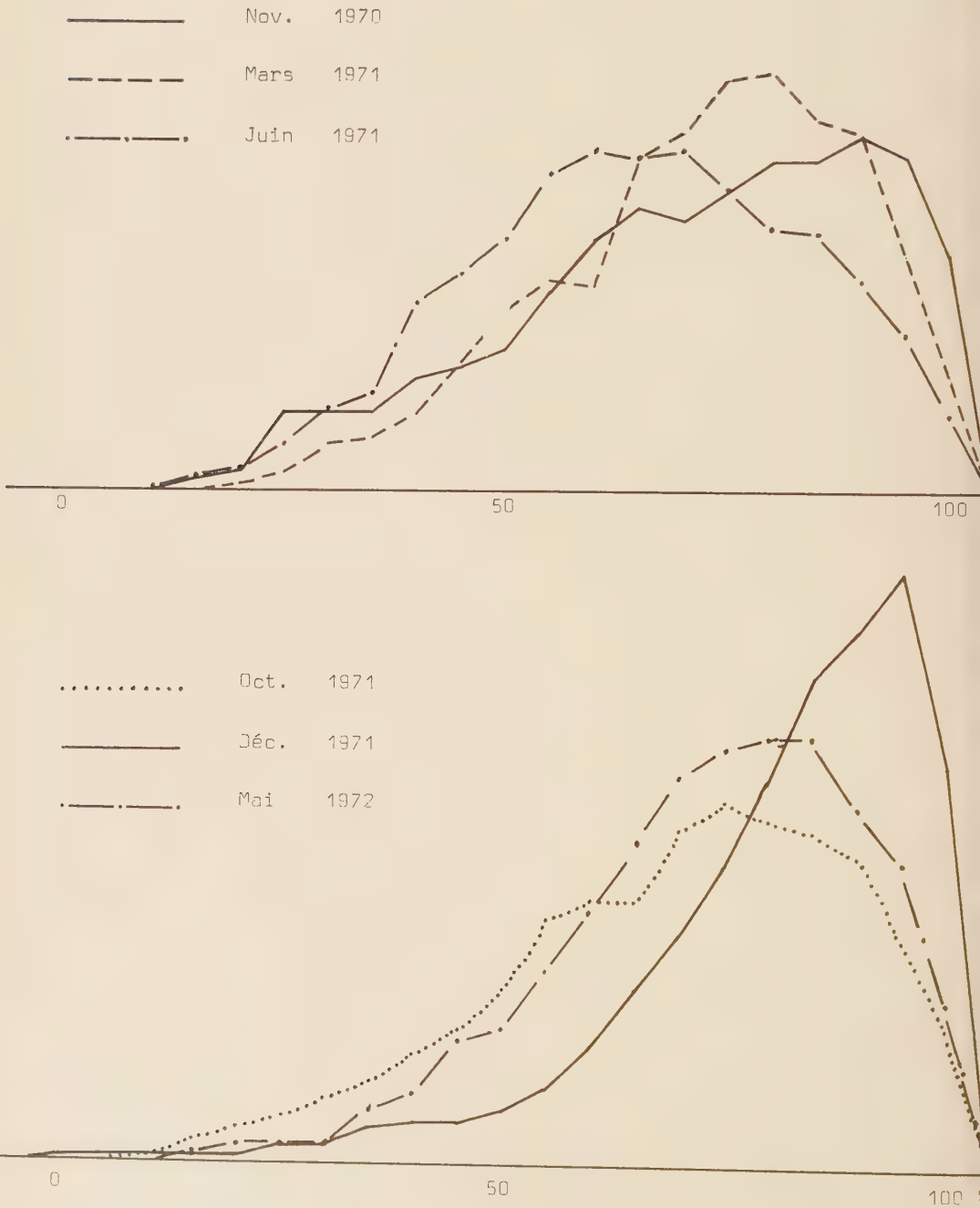
Distribution des résultats

— Nov. 1970
- - - Mars 1971
· · · · · Juin 1971

0 50 100

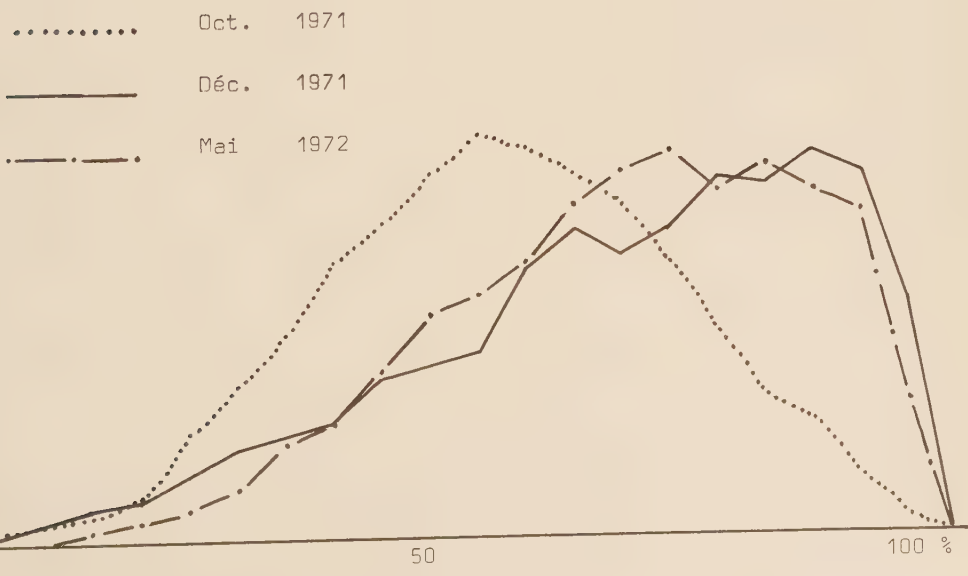
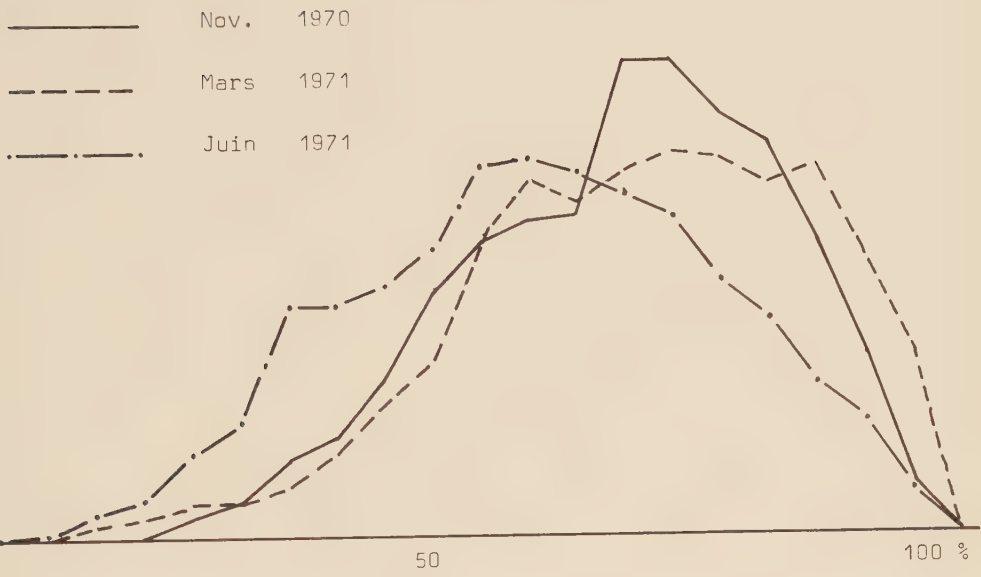
..... Oct. 1971
— Déc. 1971
· · · · · Mai 1972

0 50 100 %



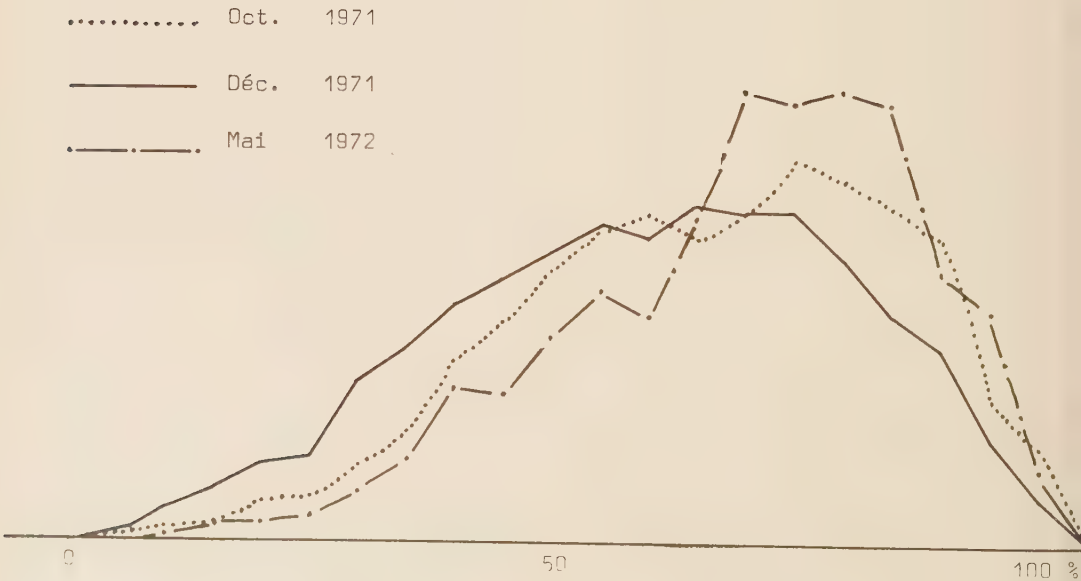
4e ANNEE

Distribution des résultats



5e ANNEE

Distribution des résultats



L'examen des différents graphiques suggère un certain nombre de réflexions. Tout d'abord, il faut tenir compte, dans la comparaison entre les degrés, du nombre des sujets entrant en jeu. En deuxième, en troisième et dans le second graphique de quatrième, les tests touchent plus de 1000 élèves tandis que le premier graphique de cinquième année ne porte que sur 250 sujets environ.

Les courbes des distributions reflètent bien les problèmes déjà mentionnés que pose l'élaboration simultanée des programmes et des méthodes d'une part, des instruments indispensables pour le contrôle de leur efficacité d'autre part. Elles caractérisent aussi la double intention qui préside à la construction des épreuves : tantôt l'accent est mis sur le contrôle du bagage minimum demandé à l'enfant, tantôt l'épreuve prend un caractère exploratoire et cherche à déterminer jusqu'où peuvent être développés les thèmes de recherche et les exercices de telle sorte qu'ils constituent encore des activités fructueuses pour la majorité des élèves d'une classe. Elles montrent enfin la lente progression qui peu à peu, au fur et à mesure de l'avancement des travaux, précise l'adéquation entre l'enseignement et ses moyens de contrôle; les distributions de résultats se rapprochent progressivement de la forme en J caractéristique des contrôles d'apprentissage.

En deuxième année, nous bénéficions d'une expérience de cinq ans tant dans le domaine de la mise au point des contenus et des techniques que dans celui de la construction des tests. En outre, la quantité de la matière que les enfants doivent acquérir est relativement restreinte. La conjonction de ces deux faits explique en grande partie la forme des distributions obtenues en 1971-72. Ces distributions paraissent proches de la courbe optimale. La plus grande partie des élèves obtiennent un bon rendement tandis que l'épreuve est assez discriminative pour révéler les sujets présentant des handicaps importants.

En troisième année, si l'on fait exception de l'épreuve de décembre 71 dont le but était le contrôle de l'acquisition d'un bagage minimum, la situation est un peu moins favorable mais la tendance est la même que dans le deuxième degré. La comparaison des courbes obtenues en 1970-71 d'une part, en 1971-72 d'autre part, met en évidence le passage progressif d'une distribution proche de la courbe de Gauss à une distribution en J.

On retrouve la même tendance, à un moindre degré en raison d'une expérience de trois ans seulement, en quatrième année. Le déplacement des sujets vers les rendements élevés est manifeste dans les deux

derniers tests mais le manque de précision des contenus et des objectifs est la cause d'une plus grande hétérogénéité des activités entreprises dans les classes expérimentales. De ce fait, les questions posées ont surpris partiellement certaines classes.

Enfin, les résultats de cinquième année confirment la difficulté de créer, au début d'une expérience, les instruments de contrôle adéquats.

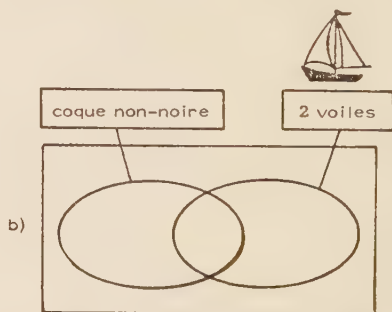
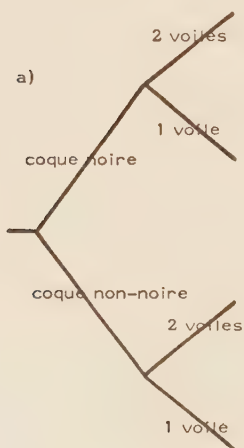
En conclusion, la comparaison entre les quatre degrés permet la mise en évidence d'une certaine cohérence qui devrait conduire, dans les années ultérieures, à l'obtention dans tous les degrés de courbes voisines de celles qui apparaissent dès maintenant en deuxième année.

Les résultats globaux présentent un intérêt certain. Néanmoins, dans la perspective d'une amélioration continue de la réforme entreprise, c'est dans l'analyse détaillée des données fournies par la compilation des items pris individuellement que réside la plus grande source d'information. C'est elle qui, dans une très large mesure, conditionne les ajustements successifs et détermine les modifications du contenu ou des méthodes d'enseignement liées aux différentes notions figurant dans le plan d'études initial.

Le lecteur trouvera, dans les pages qui suivent, des exemples d'items touchant aux différentes notions abordées et les réflexions qu'a suggérées cette analyse.

12.2 Les ensembles : activités de classement

Dans chaque diagramme, trace une croix à l'endroit où ce bateau est ancré.

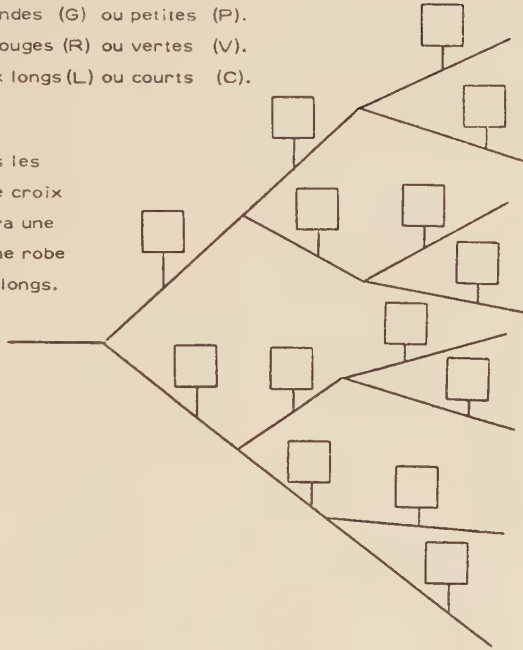


c)

	coque noire	coque non-noire
1 voile		
2 voiles		

Voici un arbre qui sert à trier des poupées.
Les poupées sont grandes (G) ou petites (P).
Elles ont des robes rouges (R) ou vertes (V).
Elles ont des cheveux longs (L) ou courts (C).

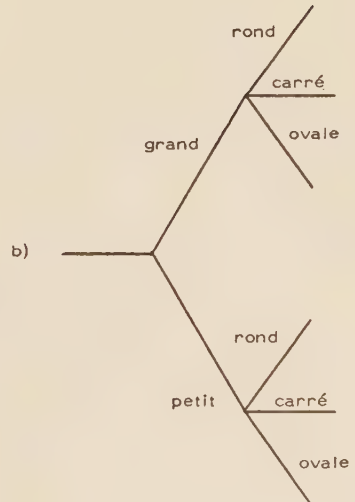
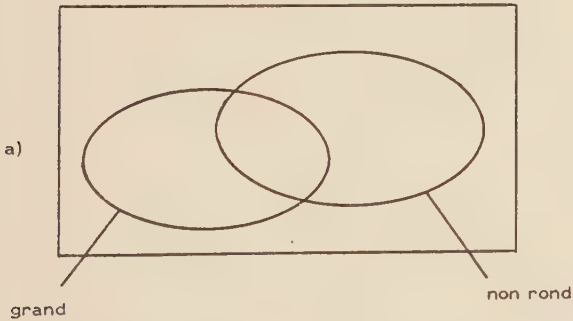
Place les lettres dans les
étiquettes et mets une croix
à l'endroit où arrivera une
petite poupée qui à une robe
verte et des cheveux longs.



Voici des boutons :



Dans chaque diagramme, dessine à l'endroit qui convient le
bouton désigné par la flèche:



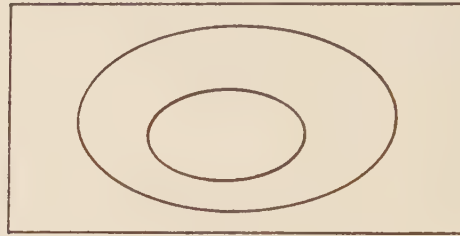
c)

	rond	non rond
grand		
petit		

a) Accroche les étiquettes suivantes à l'ensemble qui convient :

nombre terminés
par un zéro

nombre pairs

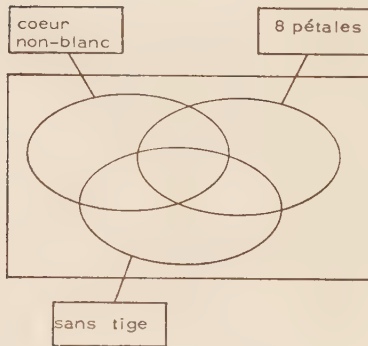


b) Place les nombres suivants : 7 - 10 - 14 - 16 - 20

Dans chaque diagramme, place
au bon endroit les lettres qui
désignent ces dessins.



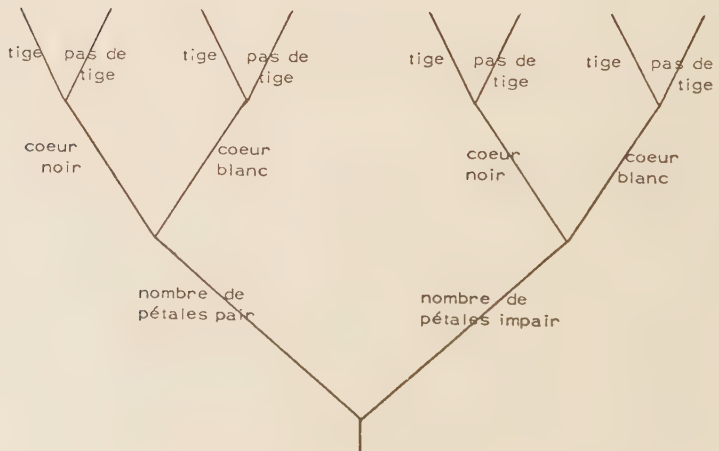
1)



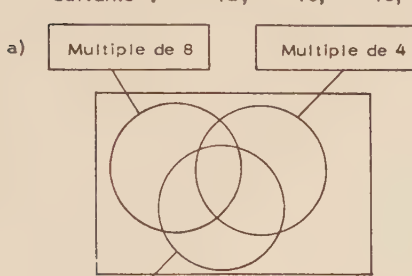
2)

	cœur ni noir ni blanc	cœur noir ou blanc
avec tige		
sans tige		

3)

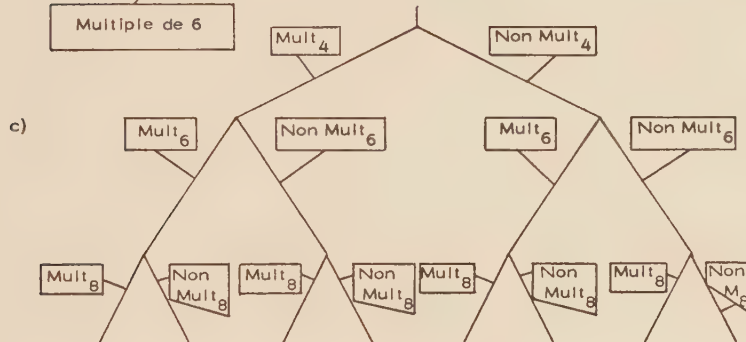


Dans chaque diagramme, place à l'endroit qui convient, les nombres suivants : 12, 16, 15,

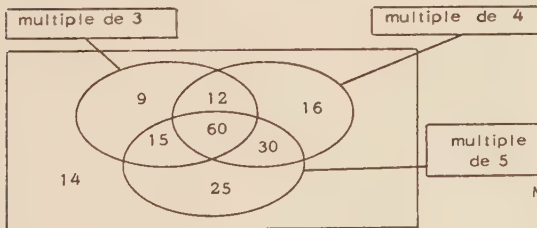


b)

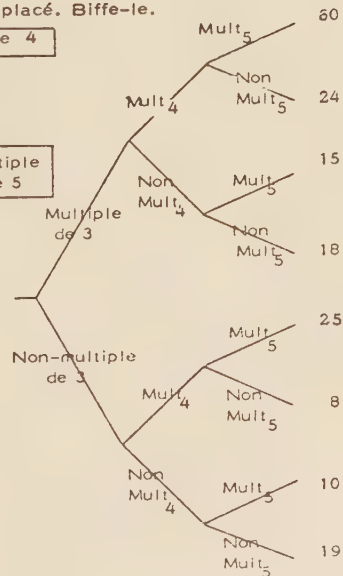
	Mult ₄	Non Mult ₄
Non Mult ₆		
Mult ₆		



Dans chaque diagramme, un nombre est mal placé. Biffe-le.



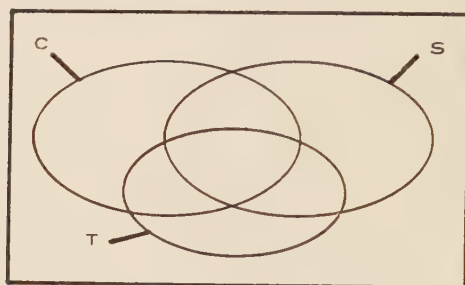
	Multiple de 4 ou de 5	Non mult ₄ et Non mult ₅
multiple de 3	60	9 21
non-multiple de 3	16 25	28 14



C = Ensemble des enfants qui habitent à la campagne.

S = Ensemble des enfants qui ont une soeur.

T = Ensemble des enfants qui vont au théâtre.



Lis les phrases qui suivent et inscris les noms soulignés, dans le diagramme, à la place qui convient.

M. et Mme Dupont ont deux enfants : Eric et Amélie. Ils habitent au coeur de la ville. Eric va parfois au théâtre avec ses parents mais Amélie n'est pas assez grande pour les accompagner.

Même si Daniel et sa soeur n'habitaient pas si loin de la ville, ils ne pourraient pas aller au théâtre car ils sont encore trop jeunes.

34 questions, souvent très voisines les unes des autres, ont été posées dans le domaine des classifications. En deuxième année, le classement d'objets lorsque les critères sont définis donne de bons rendements dès le début de l'année scolaire. Les trois représentations - diagramme de Venn, diagramme de Carroll, arbre de classement - fournissent des rendements relativement proches. Approximativement on peut fixer le rendement moyen à 85% pour le diagramme de Venn, 81% pour l'arbre de classement et 80% pour le diagramme de Carroll. Cette faible marge, liée à une corrélation relativement peu élevée entre les trois types de représentations, en justifie l'utilisation simultanée dès la deuxième année. La mise en correspondance des diagrammes et la réalisation de la même activité dans les trois représentations semblent augmenter les chances que chaque élève comprenne la notion générale de classement.

Les résultats sont à peu près les mêmes en troisième année où le classement dans un diagramme de Venn provoque un rendement de 82% tandis que l'on atteint 88% dans le Carroll et 79% dans l'arbre de classement.

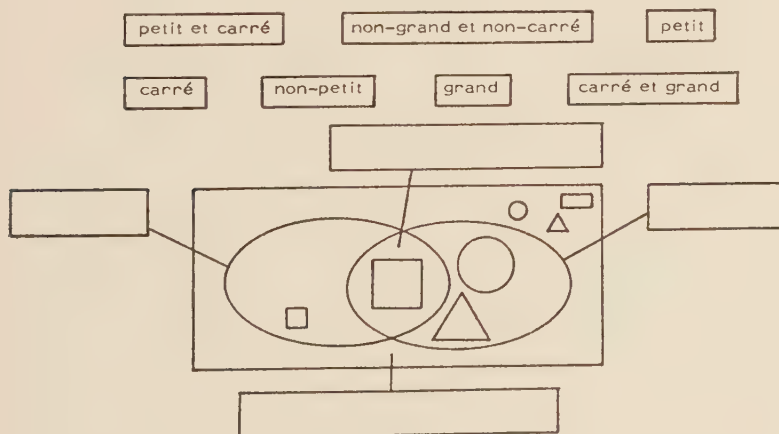
En quatrième année les items portent surtout sur le classement de nombres. Si les élèves paraissent dominer le principemême du classement, la compréhension de la notion de multiple provoque un certain nombre d'échecs.

En cinquième année, les questions sont très diverses et ne permettent guère de tirer des conclusions générales. Les élèves n'ont pas assimilé l'idée de multiple. Ils éprouvent de la difficulté à découvrir, à partir des éléments, les critères qui ont présidé à la construction d'un arbre de classement ou d'un diagramme de Venn. Enfin le classement de grands nombres, comme l'extraction d'informations à partir d'un texte, posent encore des problèmes.

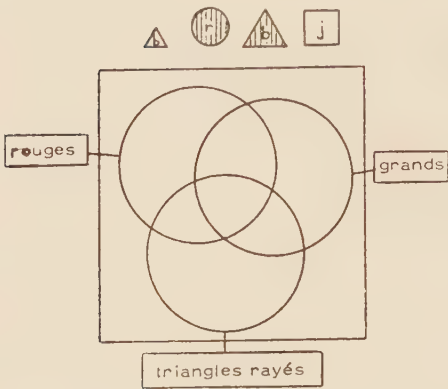
En résumé, le programme semble correspondre aux possibilités des élèves de deuxième, troisième et quatrième année. Il pourrait apparaître ambitieux en cinquième année si l'on ne tenait pas compte du fait que les résultats sont ceux des premières volées expérimentales et que la plupart des titulaires de ce degré faisaient eux aussi leurs premières armes dans le chemin de la mathématique.

12.3 L'emploi des connecteurs logiques "et" et "ou"

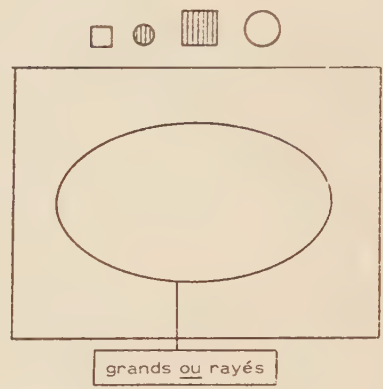
Parmi ces étiquettes, choisis celles qui conviennent :



a) Place les formes à l'endroit qui convient.



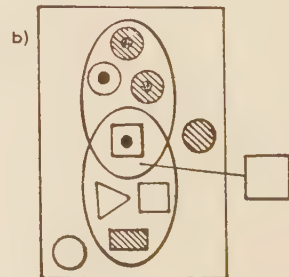
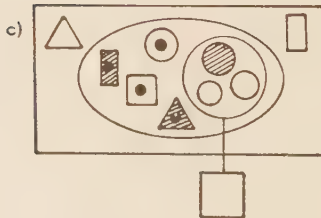
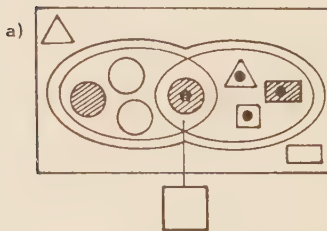
b) Place les formes à l'endroit qui convient.



Voici une série d'étiquettes :

1. Rond et avec point.
2. Rond ou avec point.
3. Rond et sans point.
4. Rond ou sans point.
5. Non rond ou avec point.
6. Non rond et avec point.

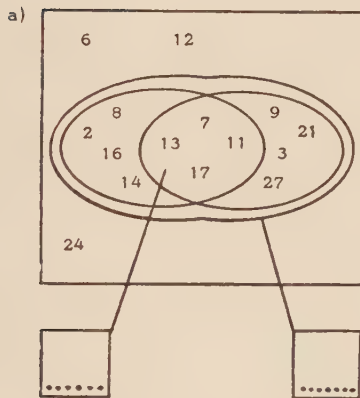
Indique dans chaque diagramme le numéro de l'étiquette qui convient :



Voici une série d'étiquettes :

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| 1. Impair et multiple de 3 | 4. Pair ou multiple de 3 |
| 2. Impair ou multiple de 3 | 5. Impair et non-multiple de 3 |
| 3. Pair et multiple de 3 | 6. Impair ou non-multiple de 3 |

Dans chaque diagramme, indique sur le pointillé le numéro de l'étiquette qui convient :



b)

plus petit que 20	11 5 13 17 1 7 19	6 3 9 8 14 18	
plus grand que 20	25 29 31	27 26 24	23 35 21 30

a) $X < 50$ et X est un multiple de 8

Ecris le plus grand nombre qui peut remplacer X

b) $X > 12545$ et X est un multiple de 1000

Ecris le plus petit nombre qui peut remplacer X

c) X est un multiple de 3 ou X est un multiple de 4

Biffe les nombres qui ne conviennent pas :

3	4	6	8	9	10
12	14	15	16	18	20

L'utilisation des connecteurs logiques qui régissent les notions d'intersection et de réunion a fait l'objet de 16 items qui diffèrent de manière assez nette quant à la forme et au degré de difficulté.

En deuxième et en troisième années, les questions n'abordent que l'emploi du mot "et" à propos de données figurales. Les résultats obtenus montrent que cette notion est accessible à la plupart des enfants de troisième année mais que la configuration perceptive peut encore jouer un rôle important.

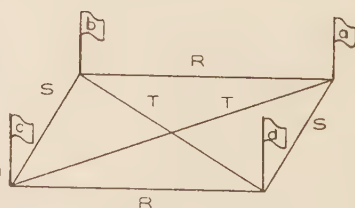
Les observations effectuées en quatrième année montrent que, sur des objets qualitatifs ou numériques, la description des éléments appartenant à une intersection par l'utilisation du mot "et" semble assimilée dans les cas les plus simples. Un certain nombre d'échecs sont pourtant encore enregistrés lorsque la situation implique la négation d'une propriété. L'emploi du "ou" inclusif est nettement plus difficile. Moins de la moitié des sujets l'utilise de manière correcte.

Les résultats donnés par les élèves de cinquième année marquent un certain progrès par rapport au degré précédent mais l'introduction d'items à support numérique provoque une baisse de rendement sensible. Il est vrai que cette diminution doit être plus imputée à une méconnaissance des propriétés des nombres qu'à celle des connecteurs logiques. D'autre part, on constate que le "ou" inclusif pose encore des problèmes à de nombreux sujets quand il s'applique à la notion de multiple ou de diviseur.

12.4 L'approche de la structure de groupe

Sur le terrain de jeu, les élèves peuvent se déplacer d'un fanion à un autre fanion en suivant les lignes "S", "R" ou "T".

"E" signifie que l'on reste près du même fanion.

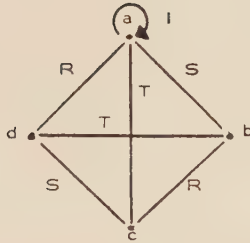


a) Jean part de c et effectue le trajet RSTSR.

Il aurait pu arriver au même endroit en parcourant une seule ligne.
Laquelle ?

b) Trouve le trajet le plus court qui peut remplacer les chemins suivants :

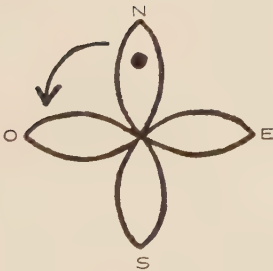
$TRT \equiv \dots$ $SR \equiv \dots$ $RST \equiv \dots$



Pour aller de a à c tu peux prendre le chemin T ou le chemin RS ou encore le chemin SR

- a) Quel est le chemin le plus court qui remplace :
RSTSSRS ? C'est
- b) Quel est le chemin le plus court qui remplace :
TSSTRR ? C'est
- c) Complète le tableau des compositions de deux chemins :

	I	R	S	T
I	I	R	S	T
R	R	I		
S	S	T		
T	T	S	R	I



L'hélice tourne dans le sens de la flèche.

Quatre mouvements sont possibles :

- q. un quart de tour
- d. un demi tour
- t. trois quarts de tour
- c. un tour complet

André effectue t puis encore t .
Quel mouvement doit-il encore faire pour que le point revienne en N ?

Voici le tableau de composition de deux mouvements.

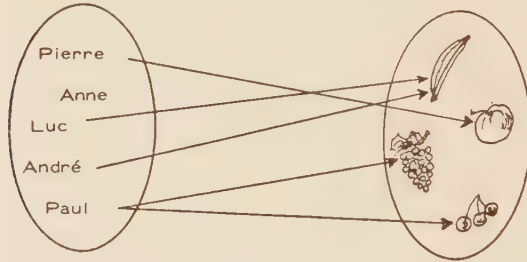
Place les lettres qui conviennent dans les cases marquées d'une croix.

	c	q	d	t
c	c	q	d	t
q	q		x	
d	d			x
t	t			

L'élaboration, au niveau intuitif, de la structure de groupe est entreprise par des jeux et des manipulations d'objets dès la deuxième année. C'est en fin de quatrième seulement qu'il est possible de présenter aux élèves des questions sous forme écrite dans ce domaine. Les rendements observés mettent en évidence la difficulté de notions qui, au premier abord, pourraient être considérées comme simples. Il est difficile, sur la base des renseignements obtenus, de déterminer la part d'échec due à l'incompréhension de la structure de celle qu'il faut imputer à des difficultés de lecture mais il est certain que les deux éléments jouent un rôle dans l'insuccès. Dans la forme où elle a été testée, on peut considérer que la notion est assimilée en fin de cinquième année.

12.5 La relation d'un ensemble A vers un ensemble B

Pour la récréation, les élèves choisissent leur goûter.
La flèche signifie : "... choisit..."



a. Que choisit Paul ?

Réponse :

b. Qui choisit la banane ?

Réponse :

a) Dessine les formes qui conviennent dans les cases qui ont une croix.

	○	□	△	*
rouge	x			
bleu			x	
vert		x		
noir				

b) Dessine un carré noir dans la case qui convient.

Les enfants d'une classe ont établi un tableau pour savoir ce que les élèves doivent faire. Lis-le et complète les phrases.

	Gérard	Sylvie	Maurice	Danielle
ouvrir les fenêtres	X			
distribuer les cahiers		X		X
nettoyer le tableau	X		X	

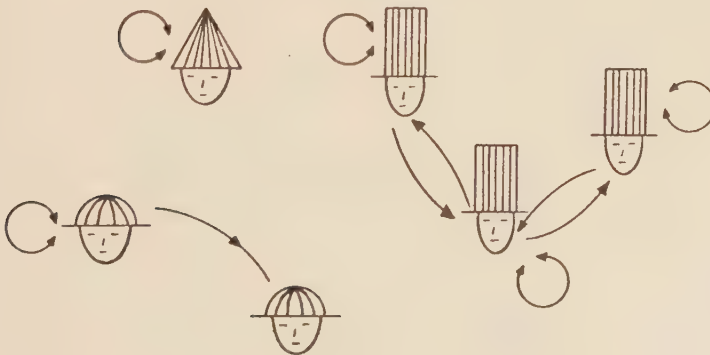
..... doit ouvrir les fenêtres et nettoyer le tableau.

Sylvie et Danielle doivent.....

Le cas général de la relation a été abordé avec les élèves les plus jeunes tandis que, dès la quatrième année, l'accent a été mis sur la relation entre éléments appartenant à un même ensemble. Cette position est-elle justifiable ? Au vu des résultats observés, on peut craindre que certaines relations importantes soient mal comprises de l'enfant en raison de cet abandon prématuré des exercices dans lesquels une relation est établie entre éléments de deux ensembles bien distincts.

12.6 Les relations d'équivalence et d'ordre sur données qualitatives.

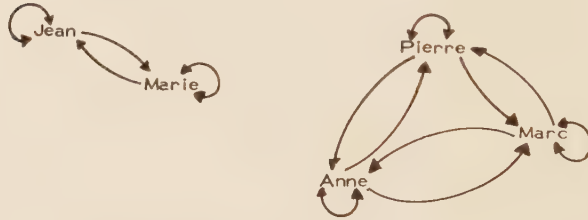
La flèche signifie : "a le même chapeau que"
Trace les flèches qui manquent.



La flèche signifie : "... est placé moins haut que..."
Trace toutes les flèches.

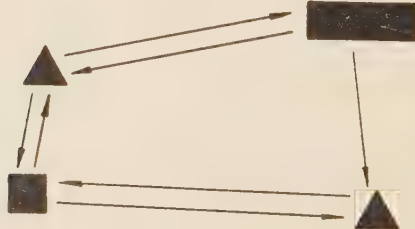


La flèche signifie : "... habite dans la même rue que..."
Observe le diagramme puis complète les phrases.



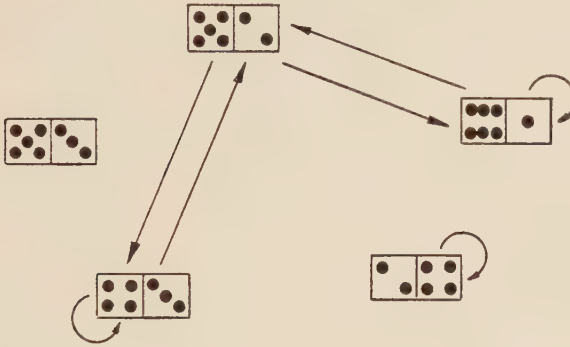
- Jean habite dans la même rue que
- Pierre n'habite pas dans la même rue que
et

La flèche signifie : "n'a pas la même forme que".
S'il manque des flèches, trace-les.



La flèche signifie : "a le même nombre de points que".

S'il manque des flèches, trace-les.



Voici un tableau qui représente la relation :

"...est arrivé à l'école plus tard que..."

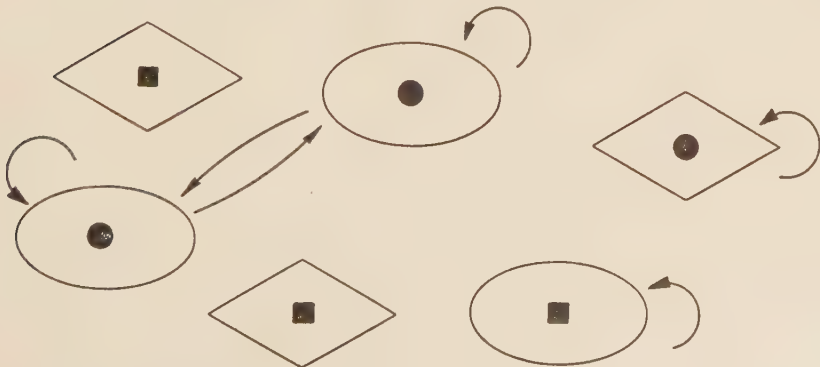
	Katia	Paul	Jean	Alice	Eliane
Katia				X	X
Paul	X		X	X	X
Jean	X			X	X
Alice					
Eliane				X	

a) Qui est arrivé en dernier ? C'est _____

b) Qui est arrivé le premier ? C'est _____

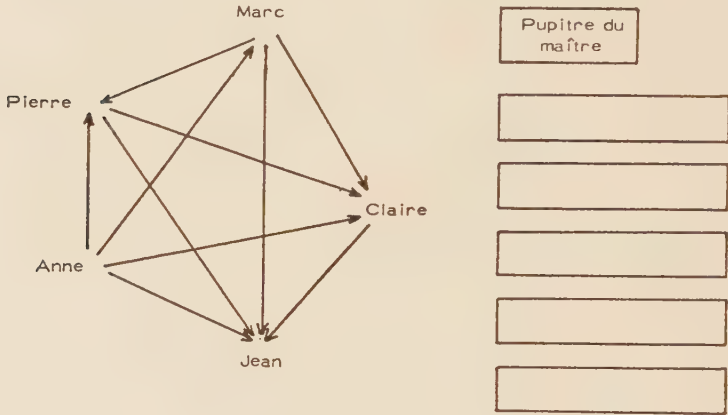
La flèche signifie : "a la même forme et le même dessin que"

S'il manque des flèches, trace-les.



La flèche signifie : "est placé devant"

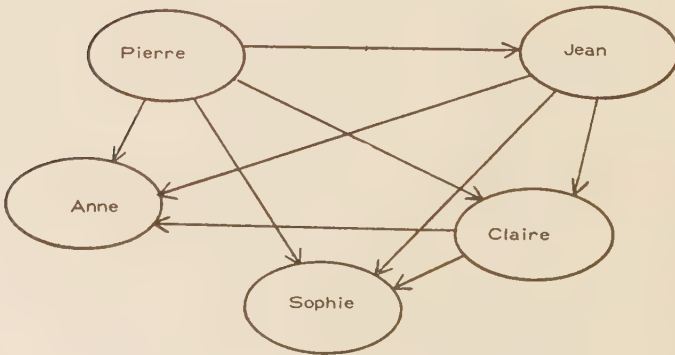
A l'aide des indications données par le diagramme fléché, retrouve la place occupée par chaque enfant et inscris leurs noms dans l'ordre.



La flèche signifie : "...est plus âgé que..."

Toutes les flèches ont été tracées.

a) Mets les croix dans le tableau pour qu'il donne les mêmes renseignements.

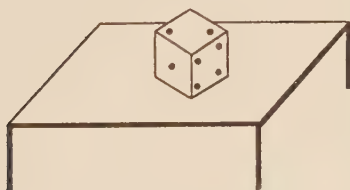


	Pierre	Anne	Claire	Jean	Sophie
Pierre					
Anne					
Claire					
Jean					
Sophie					

b) Regarde bien les flèches et souligne la phrase qui convient :

1. Sophie est plus âgée qu' Anne.
2. Anne est plus âgée que Sophie.
3. On ne peut pas savoir si Anne est plus âgée ou moins âgée que Sophie.
4. Anne a le même âge que Sophie.
5. Claire a le même âge qu'Anne.

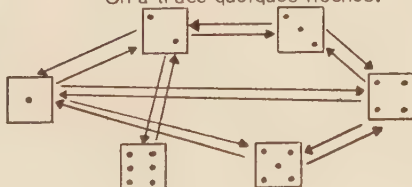
Voici un dé à jouer.



La flèche signifie :

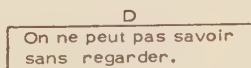
"...touche à ..."

On a tracé quelques flèches.

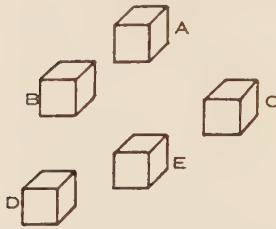


Qu'y a-t-il sur la face du dé qui est contre la table ?

Entoure la lettre qui convient.



Voici des plots. Dans le tableau, on a représenté la relation :
"n'a pas le même poids que".



	A	B	C	D	E
A		X	X		X
B	X		X	X	X
C	X	X		X	X
D		X	X		X
E	X	X	X	X	

Quels sont les plots qui ont le même poids ?

Réponse : les plots qui ont le même poids sont et

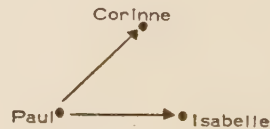
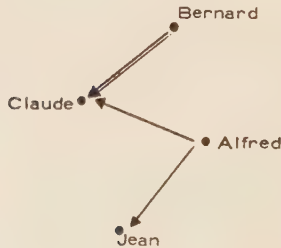
Les relations d'ordre et d'équivalence ont donné lieu à un grand nombre de questions, tant dans le domaine numérique, qui sera examiné plus loin, que dans la découverte d'une relation entre des éléments qualitatifs. Les rendements sont en général satisfaisants quoique le contenu sémantique des items joue parfois un rôle non négligeable.

12.7 Les relations de parenté

La flèche $\longrightarrow$ signifie "... est le père de..."

La flèche $\Longrightarrow$ signifie "...a comme soeur..."

Trace les flèches qui manquent.



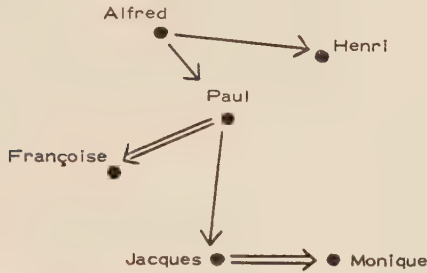
On a placé quelques flèches.

La flèche $\longrightarrow$ signifie "...est le père de..."

La flèche $\Longrightarrow$ signifie "...est le frère de..."

Une flèche rouge signifie "...est l'oncle de..."

Trace toutes les flèches rouges.



Certains auteurs paraissent attacher beaucoup d'importance aux relations de parenté, dans lesquelles ils voient l'un des rares contre-exemples aux relations d'ordre et d'équivalence qui soient accessibles à de jeunes élèves. C'est oublier que les notions sous-jacentes sont encore très floues chez l'enfant de 9 à 10 ans et souvent marquées par une très forte charge affective. Il est donc difficile de connaître la part d'erreur revenant à la méconnaissance des termes eux-mêmes et celle qu'il faut attribuer à une construction insuffisante du raisonnement logique. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes limités à des cas très simples. Néanmoins, l'analyse des rendements est fort instructive. Ainsi, à la fin de la quatrième année, la grande majorité des sujets découvre que, puisque J et C ont le même père, J a comme soeur C. Et pourtant un tiers des sujets ne parvient pas à effectuer le raisonnement inverse : puisque B a comme soeur C, c'est donc que A est aussi son père. De plus, près de 20 % des sujets ne reconnaissent pas la symétrie partielle de la relation "a comme soeur".

12.8 Les relations dans le domaine numérique

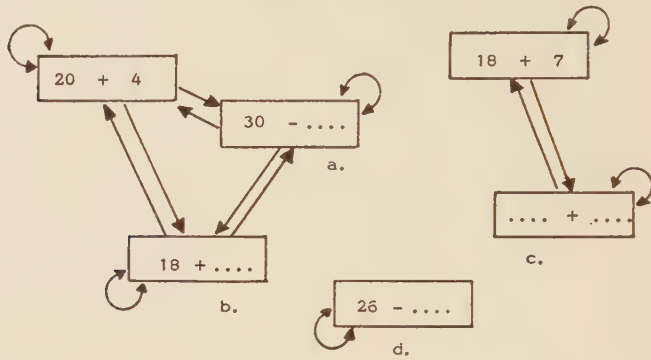
La flèche signifie : " est plus grand que "

Trace les flèches qui manquent

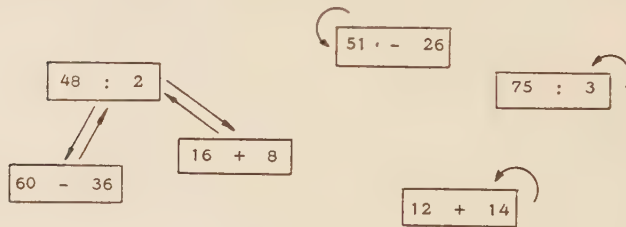


La flèche signifie : "...représente le même nombre que..."

Ecris les nombres qui manquent pour que tout soit juste.

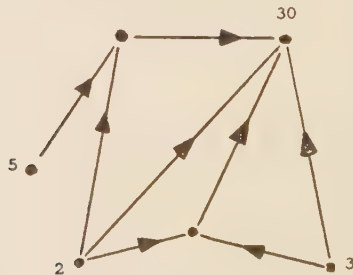


La flèche signifie "représente le même nombre que".
S'il manque des flèches, trace-les.



La flèche signifie "... est un diviseur de ..."

Inscris à côté des points les deux nombres qui manquent.

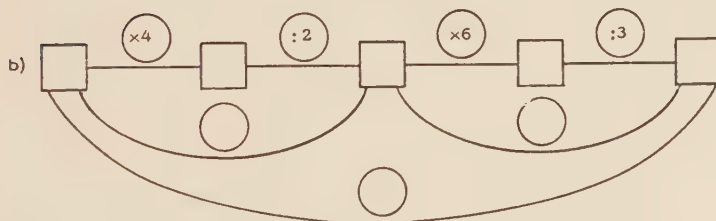
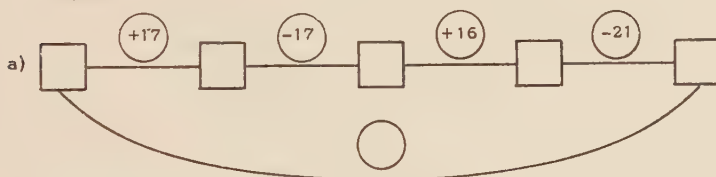


Les items portant sur les relations dans le domaine numérique ont été répartis en deux sous-chapitres. Les problèmes ci-dessus abordent les notions d'ordre, de succession, d'équivalence, de diviseur. Le prochain paragraphe traitera de la notion d'application.

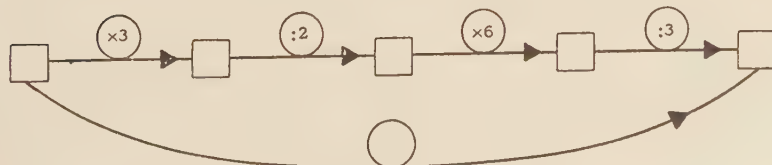
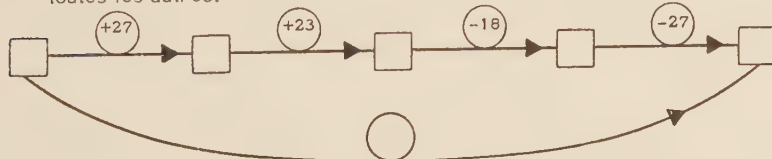
La représentation sagittale d'une simple relation d'ordre est en général comprise. Cependant, au début de la troisième année encore, 15% des sujets n'ont pas acquis une méthode de travail leur garantissant de n'omettre aucune flèche. Lorsque le lien verbal indique une différence numérique le rendement est relativement faible. Enfin, même en cinquième année, un tiers des élèves semble ne pas pouvoir utiliser la transitivité.

12.9 L'application dans le domaine numérique

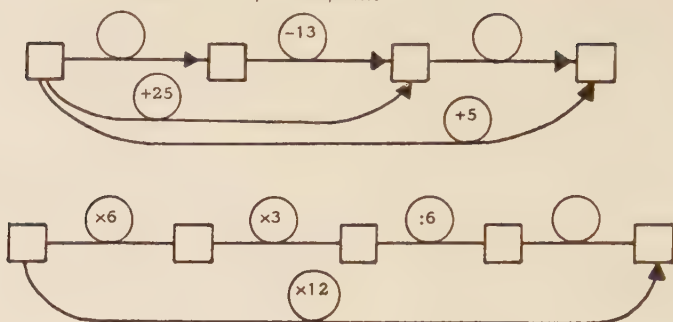
Invente un nombre de départ et trouve la "machine" qui remplace les autres.



Invente un nombre de départ et trouve la "machine" qui remplace toutes les autres.

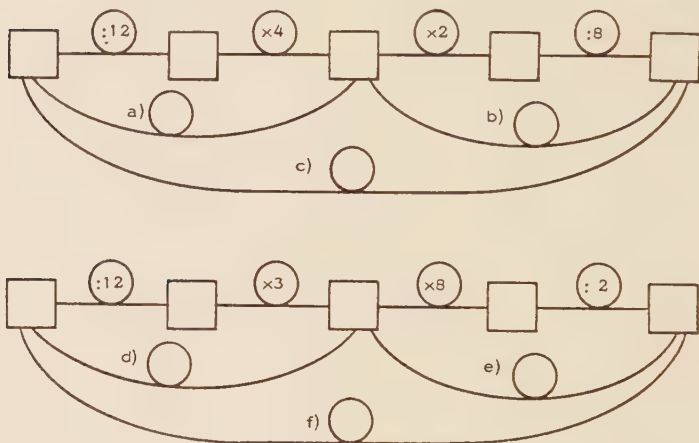


Trouve les "machines" qui manquent.



Trouve les "machines" qui manquent.

Si c'est nécessaire, aide-toi en choisissant un nombre de départ.



Indéniablement, ce que certains auteurs désignent sous le vocable de "machine" ou d'opérateur, n'a pas été assimilée par les élèves. Dans la plupart des cas, les sujets se livrent à une activité de comptage, mais la composition de deux applications reste inaccessible à un grand nombre d'enfants.

En deuxième et en troisième années, les résultats relatifs à l'addition et à la soustraction sont satisfaisants tant que les nombres sont assez petits pour que le calcul soit aisé mais la mobilité d'esprit n'est pas assez grande pour que l'enfant puisse découvrir des stratégies de comparaison et procéder par compensation. La comparaison des rendements observés montre qu'il n'y a pratiquement aucun progrès entre la fin de la deuxième et de la troisième année. En quatrième année encore, un tiers des sujets se trouve en difficulté.

La situation est tout aussi défavorable en ce qui concerne la multiplication et la division. En troisième année, un cas tout à fait simple est résolu par la moitié des sujets seulement. Au début de la quatrième année, la réduction d'une chaîne de quatre multiplications et divisions dont deux s'annulent n'atteint pas 20% de réussite. Ces constatations nous conduiront à proposer, dans la dernière partie de l'ouvrage, une nouvelle approche méthodologique.

12.10 La numération : succession - sériation - approximation

Complète la série

Base quatre

130 131 132 133

Base trois

101 110 112 121

En base dix, quel nombre vient immédiatement avant

7000 14530

La flèche signifie : "vaut 12 de plus". Ecris les nombres qui conviennent en base quatre.



En base dix :

17 800 précède 17 801 d'une unité.

a) 16 900 précède d'une centaine.

b) précède 12 400 d'une dizaine.

Trouve les nombres qui manquent :

- a) base cinq 10 13 24 32
- b) base dix 15 30 45 60

Arrondis 253,72 à l'unité la plus proche :

.....

Arrondis 12 643 à la centaine la plus proche :

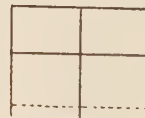
.....

Les notions de prédécesseur et de successeur immédiat d'un nombre sont encore mal assimilées au début de la quatrième année. A la fin du premier trimestre de cinquième, trois quarts des sujets semblent les maîtriser. S'il s'agit de découvrir un nombre qui en précède un autre d'une dizaine ou d'une centaine, 50% des sujets en fin de quatrième, 75% au terme de la cinquième année, donnent une réponse exacte. Nous noterons qu'il est toujours plus difficile de découvrir un nombre qui en précède un autre que celui qui en suit un autre.

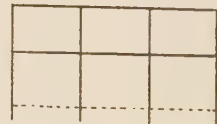
12.11 La numération : groupements en différentes bases

Dessine les groupements et écris le nombre

a) Base cinq



b) Base trois



Dessine le nombre de croix correspondant à la notation :

1	0	1

base deux

base quatre

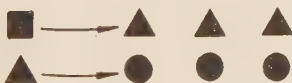
base cinq

Cette série d'items tente de vérifier comment se construit la notion de groupement avant que cette dernière soit exploitée pour l'apprentissage de la technique de l'addition et de la soustraction.

En deuxième année, le codage d'un nombre est assimilé par plus de 80 % des sujets dès la fin du premier trimestre. En revanche, il faut attendre le deuxième trimestre de troisième année pour que le décodage d'un nombre soit maîtrisé par la quasi-totalité de la population scolaire.

12.12 La numération : les échanges

Règle d'échange :



André a un carré et deux triangles. Il les échange contre des ronds.

Dessine ce qu'il obtient. Combien en reçoit-il ?

→

Réponse : André reçoit ronds.

Règle d'échange :



Voici une collection :

A



Quelles collections ont la même valeur que A ?

Entoure les lettres qui conviennent.

B



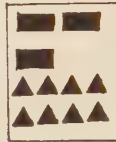
C



D



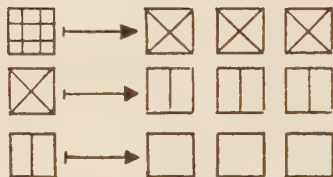
E



F



Voici une règle d'échange :



a) On échange un



contre des



et on les partage entre 3 enfants.

Chaque enfant recevra donc



b) On partage un



entre deux enfants.

Chaque enfant recevra

et il restera

Règle d'échange :



1		=	5	
1		=	5	
1		=	5	

Effectue les échanges qui te permettent de partager la collection A en trois parts égales.

Inscris ici la valeur d'une part :

.....

La notion d'échange apparaît comme particulièrement difficile. Abordée dans le premier programme provisoire, en tant que l'une des manières de préparer la compréhension de la soustraction avec retenue, elle s'est avérée, dans la présentation choisie, inaccessible à la majorité des élèves. Déjà au cours de l'année 1971-72, les exigences ont été ramenées à une dimension plus compatible avec les possibilités réelles des enfants. Néanmoins, les rendements observés laissent penser que la progression des différents types d'exercices n'est pas encore assez harmonieuse.

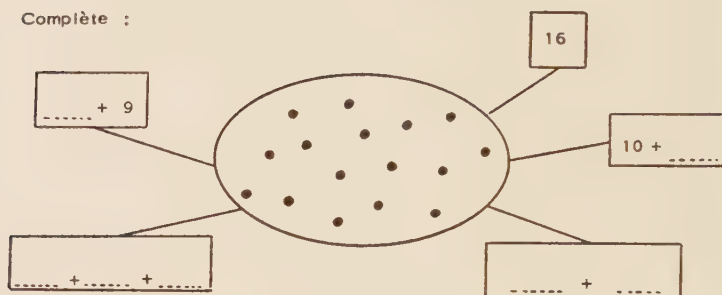
En deuxième année, la moitié des enfants seulement s'avère capable d'une comparaison très simple. A cet âge, les éléments affectifs attachés à la notion de valeur prennent largement le pas sur l'aspect logique de la situation. En troisième année, l'échange d'un élément de troisième ordre contre des éléments de premier ordre est réussi par la moitié des sujets à la fin du premier trimestre.

A la fin de l'année, trois quarts des sujets maîtrisent la notion lorsque l'on fait intervenir trois sortes d'éléments. La proportion descend à un tiers seulement si l'on passe à quatre sortes d'éléments.

En quatrième année la notion simple d'échange progresse très nettement. Elle passe de 49% en octobre à 79% en décembre puis à plus de 80% en mai. En revanche, l'introduction de la notion d'échange dans la multiplication paraît prématurée, au moins dans la première moitié de l'année.

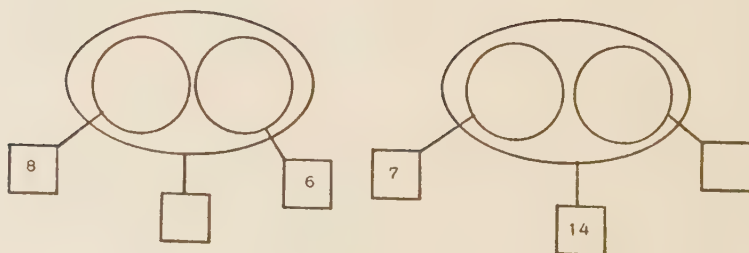
12.13 L'addition et la soustraction

Complète :



- a) $6 + 2$ $\equiv$ ___
- b) $4 + 3$ $<$ ___
- c) $5 + 5$ $>$ ___

Complète :



Complète par un des signes : $<$ $>$ $=$

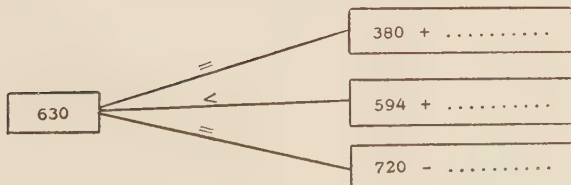
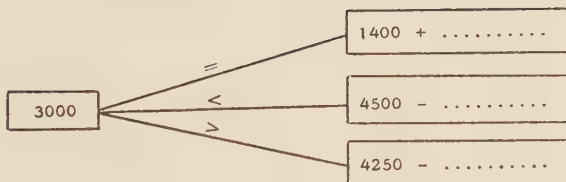
$24 + 8$		$22 + 10$
$35 - 7$		$37 - 8$
$9 + 9$		$12 + 5$
$18 + 6$		$28 - 4$

Effectue les calculs (base dix)

a) $66 + 17 =$

b) $41 - 18 =$

Complète :



Jean et Pierre se partagent des billes. Chaque fois que Jean en prend 6, Pierre en prend 4.

a) Ils ont 40 billes en tout. Quelle sera la part de chacun ?

Jean aura billes. Pierre aura billes.

b) Pour que Pierre puisse prendre 24 billes, combien faudrait-il en avoir en tout ?

Il faudrait avoir billes.

Dans ce domaine, les rendements peuvent être considérés comme satisfaisants. Il y a cependant quelques exceptions. Ainsi, à la fin de la deuxième année, nous constatons que l'emploi des symboles $\succ$ et $\prec$ pour comparer des sommes de deux nombres provoque encore de nombreux échecs.

Nous remarquons aussi que l'enfant manque de mobilité d'esprit et qu'il passe presque toujours par l'addition des nombres. Bien rares sont les sujets capables de résoudre le problème par une simple comparaison : "un de moins à gauche, un de plus à droite, donc égalité des sommes".

En quatrième année la soustraction n'est pas assimilée. Les sujets de ce degré éprouvent encore beaucoup de peine dans la manipulation des nombres plus grands que cent.

Enfin le dernier problème auquel ont été soumis les élèves de cinquième année soulève à la fois la question de la compréhension de la lecture et celle de la découverte d'une stratégie de résolution. En lui-même, ce problème est très simple. Présenté oralement, il est compris par la plupart des sujets alors que, dans sa forme écrite, il n'est réussi que par un tiers de ceux-ci.

12.14 Technique de l'addition et de la soustraction

Groupe par quatre. Ecris les nombres. Effectue l'addition.

Base quatre

+

Note la base. Ecris les nombres. Effectue l'addition.

Base.....

+

3. Effectue la soustraction. Aide-toi du dessin.

a)

Base quatre

1	2	1
	2	3

b)

Base dix

	5	4
	2	8

Effectue les opérations :

a) Base six

	1	2	3
+		3	4

b) Base dix

	3	2	6
+	1	3	5

c) Base quatre

	2	1	2
-		2	3

d) Base dix

	1	5	6
-		3	8

L'introduction du calcul numérique dans des bases autres que la base dix favorise-t-elle l'assimilation de la technique des opérations arithmétiques ? Il est encore prématuré de le dire. En effet, si des notions nouvelles comme celles d'ensembles ou de relations ont rencontré l'adhésion générale du corps enseignant, ce dernier a éprouvé plus de difficulté à accepter une modification aussi importante dans un domaine qui, à première vue, ne lui paraissait guère présenter de difficulté. Le calcul en différentes bases vise plusieurs objectifs : meilleure construction des algorithmes, transfert plus aisé dans le domaine des nombres à virgule, compréhension plus profonde du système de numération décimal, gain de temps dans l'apprentissage de l'addition et de la soustraction, diminution des "blocages" dus à un apprentissage plus basé sur la mémorisation et la répétition que sur la compréhension de la notion.

Les résultats observés, en deuxième et en troisième années principalement, fournissent un reflet de cette difficulté d'adaptation du corps enseignant ; les questions posées à la fin de l'année scolaire 1971-72 obtiennent en général des rendements supérieurs à ceux qui avaient été relevés l'année précédente. Si nous nous arrêtons particulièrement aux items de la dernière batterie d'épreuves (mai 72), nous y relèverons que les élèves de deuxième année dominent parfaitement l'addition avec retenue lorsque celle-ci s'appuie sur une représentation graphique.

En troisième année, l'addition non appuyée sur une représentation est réussie par les trois quarts des sujets. En quatrième année, la soustraction est réussie par la moitié des sujets. Ces observations appellent deux remarques : d'une part, l'addition et la soustraction ne doivent en aucun cas être considérées comme des opérations faciles, assimilées définitivement par tous les enfants de troisième année, mais ces opérations exigent une consolidation bien conduite dans les degrés qui suivent; d'autre part, la forme même de la soustraction, le nombre des chiffres du petit et du grand terme, la combinaison des chiffres formant le nombre, jouent un rôle important dans la réussite de l'opération. La construction de la soustraction devrait faire l'objet d'une recherche détaillée.

Les observations effectuées en cinquième année confirment ces propos. Deux soustractions qui paraissent d'un même ordre de difficulté fournissent, à quelques mois d'écart, un rendement de 86 respectivement 43%. En décembre, les sujets viennent d'effectuer un certain nombre d'exercices concernant la soustraction. L'acquisition de la notion semble chose faite et pourtant celle-ci n'est pas suffisante puisque, après une période de latence, le rendement diminue d'une manière brutale.

12.15 La multiplication et la division



Ecris ☐ vrai ou ☐ faux à la fin des phrases suivantes :

- Tous les éléments de A sont des multiples de 4 :
- Aucun élément de A n'est multiple de 4 :
- Il y a au moins un élément de A qui n'est pas multiple de 4 :
- Tous les éléments sont des multiples de 3 ou de 4 :

Inscris les nombres qui conviennent dans les cases
marquées d'une croix.

$\begin{smallmatrix} \times \\ \swarrow \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2		4				12		
3			9					
4				x				
5								
6			18				x	
7			x			42		
8								

Entoure d'une corde les divisions qui donnent le même résultat.

28 : 4

23 ÷ 3

25 ÷ 3

32 ÷ 5

30 : 6

72 ÷ 10

21 : 3

Tu dois partager 350 francs entre 11 personnes.

Sans calculer, Indique par une croix ce que tu penses trouver :

Chacun recevra

- ☐ 35 F
- ☐ à peu près 3 F 50 c
- ☐ un peu plus de 35 F
- ☐ un peu moins de 35 F
- ☐ un peu moins de 3 F 50 c

Les données recueillies à propos de la multiplication et de la division sont trop fragmentaires pour que l'on puisse en tirer des conclusions solides. Elles révèlent cependant, comme pour la soustraction, qu'un apprentissage systématique doit intervenir nettement plus longtemps que par le passé si l'on souhaite que l'enfant comprenne véritablement ce qu'il fait.

12.16 La technique de la multiplication.

Base six

	○	□	△
		5	3
x			4

Base dix

	○	□	△
		2	3
x			6

Effectue ces opérations en base dix.

	4	5
x		3

	4	5
x	1	0

	4	5
x	1	3

Effectue ces opérations en base quatre.

	3	1 2
x		3

	3	1 2
x	1	0

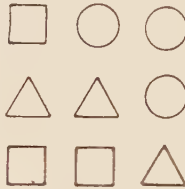
	3	1 2
x		1 3

L'apprentissage de la technique de la multiplication par le calcul en différentes bases s'appuyant sur les notions de groupement et d'échange constitue une voie longue et difficile. On constate que, à la fin de la cinquième année, trois quarts des sujets environ trouvent le résultat d'une multiplication d'un nombre de deux chiffres par un nombre de deux chiffres. Le jeu en vaut-il la chandelle ? Il est encore prématuré de

prendre position. Une option a été choisie. Comme nous l'avons déjà signalé, elle opère dans un domaine où, jusqu'ici, le corps enseignant ne s'est pas senti à l'aise. En particulier, la liaison entre les jeux de groupements et d'échanges d'une part et le calcul numérique d'autre part n'a pas toujours été clairement perçue. Il semble que, en fonction de l'expérience et du recul que peut avoir le maître au sujet du nouvel enseignement, la situation tende à s'améliorer. Il conviendra donc de suivre avec attention l'évolution de cette notion du cours des prochaines années. Néanmoins, d'ores et déjà, nous pouvons affirmer que les élèves calculent au moins aussi bien que ceux qui avaient été soumis à un entraînement de type traditionnel.

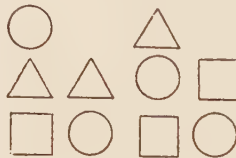
12.17 Position et déplacement.

Dessine une croix dans la figure qui est à la fois au-dessous d'un 
 et au-dessus d'un 

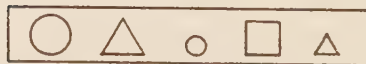


Voici une série de formes. Une seule forme est placée à droite d'un triangle et au-dessus d'un carré.

Colorie-la.

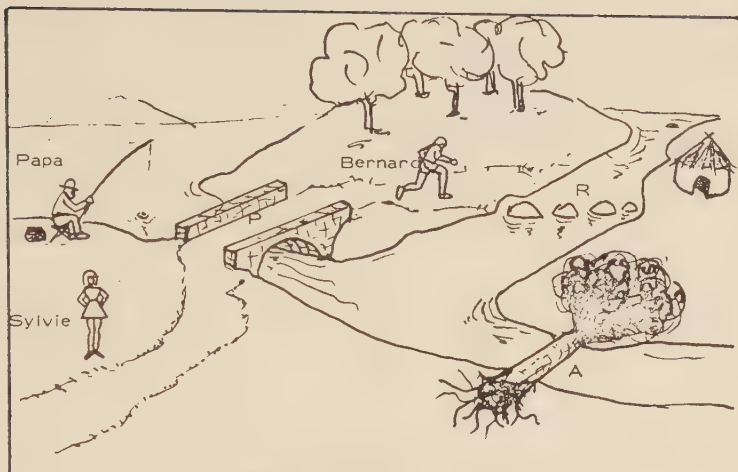


Observe :



Trace toutes les flèches qui signifient : "est à gauche de".





Bernard et Sylvie jouent au bord de la rivière pendant que leur papa pêche.

Pour passer au-dessus de l'eau, ils peuvent prendre le pont P, sauter de rocher en rocher R, ou encore franchir la rivière en marchant sur l'arbre abattu A.

Bernard est dans l'île. Il va passer dans l'ordre :

R - A - A - R - P - A

Il veut ensuite revenir vers son papa sans prendre le pont.

Par où peut-il passer ?

Trace une croix à côté de la bonne réponse :

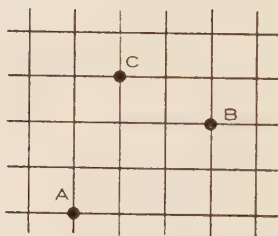
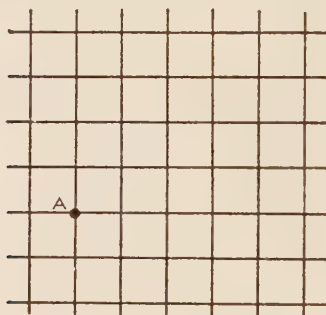
- ☐ Il passera R puis A
- ☐ Il n'a pas besoin de traverser l'eau.
- ☐ Il ne peut pas rejoindre son papa sans passer le pont.
- ☐ Il passera P.
- ☐ Il passera A.
- ☐ Il passera A puis R.

L'exploration de l'espace a donné lieu, dans toutes les classes, à un certain nombre d'exercices dans lesquels, le plus souvent, la participation corporelle des élèves est requise. Il est difficile de traduire ces activités en termes d'items susceptibles de figurer dans une épreuve de contrôle. C'est l'une des raisons pour lesquelles des items de ce type ont été peu nombreux. L'autre raison est que, devant l'ampleur de la tâche, des choix ont dû être faits. Comme la géométrie n'apparais-

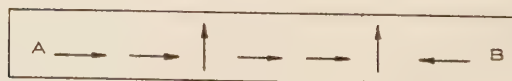
sait, dans l'enseignement de type classique, qu'en cinquième année, nous ne causions pas de préjudice aux enfants en faisant moins porter nos efforts sur ce domaine que sur d'autres. Il n'en reste pas moins que, dans une perspective plus large, l'équilibre de l'édifice en construction en a quelque peu souffert et que des travaux sont actuellement en cours dans cette direction. Les items ci-dessus ne peuvent donc être considérés que comme un coup de sonde.

12.18 Les activités dans un quadrillage.

En partant du point A, trace le chemin indiqué par les flèches et place le point B :



- a) Trace en rouge le chemin indiqué par le code.



- b) Ecris le code d'un chemin très court pour aller de B à C.

B C

- a) Pars de a.

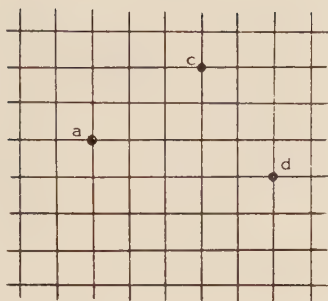
Suis le code :



Place un point b. à l'endroit où tu es arrivé.

- b) Ecris le code d'un chemin très court pour aller de c. à d.

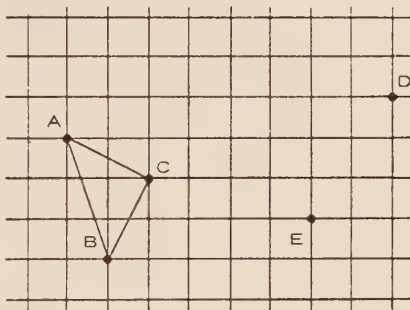
c.....d



- a) Déplace chacun des points de la figure selon le code :



- b) Relie les points que tu as trouvés par un trait rouge.



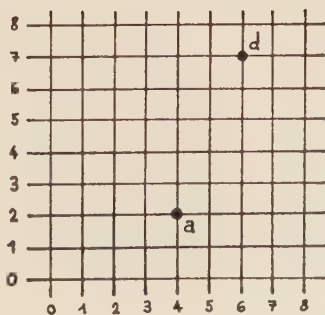
- c) Ecris le code d'un chemin très court pour aller de D à E.

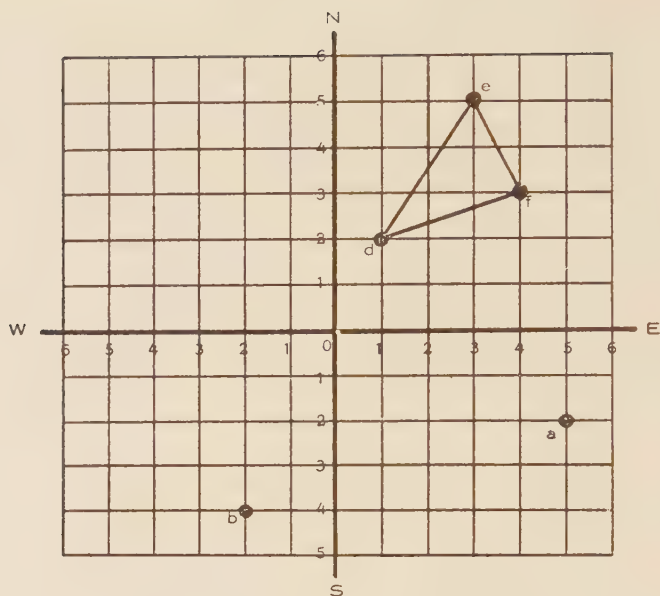
D.....E

Le point a est codé $\langle 4, 2 \rangle$
 Le point b est codé $\langle 1, 4 \rangle$
 Le point c est codé $\langle 3, 6 \rangle$

Place les points b et c dans le graphique et relie d'un trait rouge a b c d

Le point d est codé $\langle \dots, \dots \rangle$





a) Le point a est codé $\langle 5 \text{ E} ; 2 \text{ S} \rangle$

Le point b est codé $\langle \dots ; \dots \rangle$

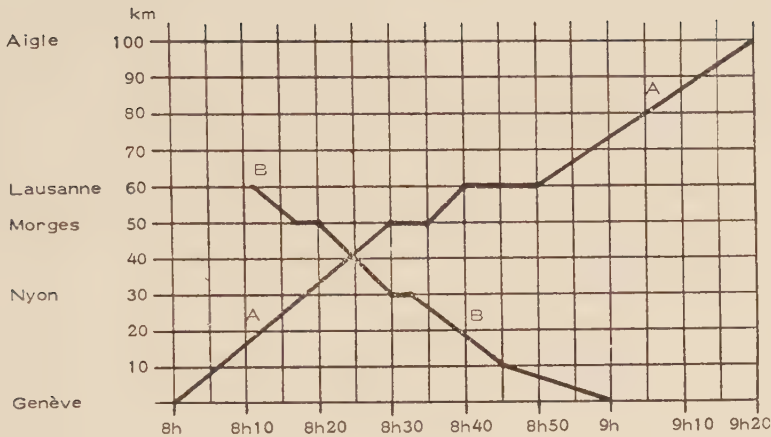
b) Le point d est codé $\langle 1 \text{ E} ; 2 \text{ N} \rangle$

Le point e est codé $\langle \dots ; \dots \rangle$

Le point f est codé $\langle \dots ; \dots \rangle$

c) Dessine en rouge la figure que l'on obtient si, dans le codage des sommets du triangle, on remplace tous les E par des W.

La collection des items consacrés aux activités dans un quadrillage part d'un simple repérage pour aboutir à la représentation d'une application affine par morceaux. En deuxième et en troisième années, le codage est généralement indiqué par des flèches indiquant le sens du déplacement. Le décodage d'un itinéraire est réussi par la plupart des sujets à la fin de la deuxième année. En revanche, il faut attendre la fin de la troisième pour que le codage d'un cheminement atteigne le même pourcentage de réussite. La difficulté de codage semble plus grande lorsque le déplacement s'effectue vers la gauche que ce n'est le cas lorsqu'il s'agit d'un déplacement vers la droite.



- Combien de temps, le train A s'est-il arrêté à Morges ?
.....
- Quelle est la vitesse, en km à l'heure, du train A entre Lausanne et Aigle ?
.....
- A quelle heure le train B est-il parti de Lausanne ?
.....
- Peux-tu dire ce que le train B a fait dix kilomètres avant Genève ?
.....
- Trace en rouge la ligne représentant un train qui part de Lausanne à 8h20 et qui se rend directement à Aigle en 25 minutes.

Le premier résultat observé en quatrième année confirme le fait que la notion n'était pas solidement construite l'année précédente; la période de latence due aux vacances scolaires a commis des ravages. Lorsque nous abordons l'idée de coordonnées, la présence de lettres majuscules et minuscules facilite la tâche de l'enfant. Le rendement faiblit nettement quand les codages vertical et horizontal comportent les mêmes symboles. En cinquième, le système de coordonnées numériques semble compris dès le début de l'année scolaire. Le dernier item de la série présente l'utilisation d'un système de coordonnées pour la représentation de l'application affine par morceaux. L'exploitation du graphique semble à la portée des élèves mais un tiers d'entre eux manque encore de sécurité lorsque la question s'écarte des cas les plus simples.

12.19 Commentaires généraux sur l'analyse des items

Après avoir passé en revue l'ensemble des items auxquels ont été soumis les élèves des classes expérimentales durant les deux années scolaires considérées, nous sommes conduits à nous poser un certain nombre de questions. Les items sélectionnés correspondent-ils aux objectifs voulus par les initiateurs de la réforme ? Constituent-ils un bon échantillonnage des connaissances et des aptitudes attendues des élèves aux différents âges ? Comment faut-il interpréter les rendements observés ? Sont-ils bons, sont-ils insuffisants ?

Au risque de nous répéter, nous insisterons une fois encore sur la difficulté résidant dans le fait que, par la force des choses, dans la mise en place d'une réforme, les dispositifs de contrôle doivent être élaborés presque en même temps que les programmes et les méthodologies, ce qui rend pratiquement impossible un essai préalable des épreuves. De plus, dans notre enquête relative à l'enseignement de l'arithmétique, une abondante documentation et une histoire de plusieurs décennies permettaient de dégager les objectifs explicites et implicites de l'enseignement et de déterminer des normes de rendement ; dans l'analyse de l'efficacité du nouvel enseignement, nous sommes contraints d'émettre des hypothèses quant au taux de réussite probable qu'obtiendra telle ou telle notion, sans que ce taux puisse acquérir une valeur de pronostic pour l'avenir.

C'est donc uniquement par l'observation des résultats enregistrés que nous pourrions dégager quelques tendances propres à confirmer la valeur des programmes et des méthodes utilisés dans la phase expérimentale ou à suggérer des modifications et des ajustements.

Afin d'y voir plus clair, tout en sachant ce qu'une telle démarche a d'approximatif et toute la perte d'information qu'elle suscite, nous allons rassembler l'ensemble des informations recueillies dans un tableau récapitulatif par notion :

Notion	Nombre d'items	Nombre de sous-items	Rendement moyen
Activités de classement	34	135	75 %
Emploi des connecteurs "et" et "ou"	16	58	71 %
Approche de la combinatoire	6	6	54 %
Approche de la structure de groupe	6	25	70 %
Relation d'un ensemble A vers un ensemble B	7	23	71 %
Relations d'équivalence et d'ordre sur données qualitatives	22	45	74 %
Relations de parenté	2	4	76 %
Relations numériques	11	33	68 %
Applications dans le domaine numérique	19	73	67 %
Numération : succession, sériation, approximation	10	27	61 %
Numération : groupements en différentes bases	6	13	78 %
Numération : échanges	14	18	51 %
Addition et soustraction	15	47	73 %
Technique de l'addition et de la soustraction	23	60	73 %
Multiplication et division	8	17	73 %
Technique de la multiplication	8	18	57 %
Position et déplacement	5	7	63 %
Activités dans un quadrillage	13	37	69 %
Mesure	2	3	78 %
TOTAL	227	649	70 %

La moyenne générale des rendements s'établit à 70 %. Elle est donc un peu inférieure au seuil de 75 % souvent adopté comme norme en pédagogie expérimentale. Compte tenu des conditions expérimentales dans lesquels les contrôles ont été effectués, le rendement peut être considéré comme satisfaisant car il devrait s'accroître sensiblement dans les années à venir pour deux raisons. D'une part, les indications d'ordre méthodologique se font de plus en plus précises et les objectifs

sont mieux déterminés. Les institutrices de deuxième et troisième années obtiennent en moyenne des rendements supérieurs à ceux de leurs collègues des degrés quatre et cinq. D'autre part, il faut tenir compte du fait que plus de la moitié du corps enseignant abordait la mathématique pour la première fois tandis qu'un tiers des titulaires, pratiquant le nouvel enseignement pour la seconde année, avait changé de degré. La proportion des maîtres pouvant justifier d'une expérience antérieure dans la même classe était donc extrêmement faible.

Sans méconnaître les réserves qui viennent d'être mentionnées, nous pouvons néanmoins faire un certain nombre de remarques au sujet des indications chiffrées fournies par le tableau ci-dessus. En premier lieu, la répartition entre les différentes "avenues" du programme est fort inégale : ensembles et relations 62 % (domaine qualitatif 36 %, domaine numérique 26 %), numération 9 %, opérations sur les nombres naturels 22 %, exploration de l'espace 7 %. La part réservée à la numération, et surtout à l'exploration spatiale sont congrues.

En second lieu, les rendements observés pour les différentes notions sont relativement homogènes, 14 fois sur 19, ils se situent entre 67 et 78 %. Il semble donc que, pris dans le sens le plus général, le plan d'études soit adapté aux possibilités des sujets.

En troisième lieu, cinq notions laissent apparaître des rendements qui peuvent être considérés comme nettement insuffisants. L'échec relatif de la notion de combinatoire paraît normal ; une grande partie des enfants n'ont pas encore atteint un niveau de développement intellectuel suffisant pour maîtriser cette notion. Sans abandonner les exercices extrêmement fructueux auxquels peut donner lieu l'idée de combinatoire, il convient de réduire quelque peu nos exigences dans ce domaine.

La numération semble n'avoir pas fait l'objet d'une progression assez harmonieuse. Tant en ce qui concerne les notions de succession et de sériation que la notion d'échange, il s'agira de réexaminer à la fois les exigences du programme, les exercices proposés aux élèves et les instruments de contrôle.

La technique de la multiplication n'est pas assimilée. Ici, c'est le problème de la méthode qui doit être soulevé, le passage par la notion d'échange est une voie intéressante mais qui demande beaucoup de temps. Il n'est pas certain que ce soit la démarche la plus efficace.

Les notions de position et de déplacement doivent être approfondies et replacées dans l'ensemble des activités concernant l'exploration de l'espace dont la programmation n'est pas encore assez précise.

En quatrième lieu, parmi les notions s'inscrivant en dessous de la moyenne générale, on trouve les relations numériques, prises aussi bien dans un sens général que dans le sens plus restrictif de l'application, des "machines" numériques. Ici encore, il conviendra d'étudier attentivement la progression des exercices proposés et la manière avec laquelle le corps enseignant aborde ces notions.

Troisième partie

ESQUISSE D'UNE METHODOLOGIE

13. GENERALITES

13.1 Les objectifs assignés à l'enseignement de la mathématique

Sur la base des considérations émises précédemment et des enquêtes effectuées, nous pouvons maintenant préciser la nature des objectifs qu'un enseignement de la mathématique adapté à notre temps devrait viser.

- a) L'enseignement de la mathématique a pour objectif premier le développement du raisonnement logico-mathématique.

Cette affirmation pourrait sembler un truisme mais nous avons vu combien l'acquisition de connaissances mal liées entre elles constituait le seul objectif de l'école. En fait, l'une des modifications majeures qu'il faut apporter à l'enseignement, indépendamment même des notions figurant aux plans d'études, réside dans la primauté à donner au raisonnement.

Des psychologues et des pédagogues ont montré tout le parti qui pouvait être tiré de l'emploi de jeux éducatifs pour favoriser la construction de l'intelligence chez de jeunes enfants. L'emploi généralisé de jeux similaires durant toute la scolarité primaire devrait, non pas forcément accélérer la construction du raisonnement mais élargir le champ d'investigation de l'enfant et lui permettre une élaboration plus structurée de sa pensée.

La mathématique est un outil irremplaçable pour la formation de l'esprit et le développement de l'intelligence implique une construction individuelle des structures mathématiques fondamentales. Le changement serait peu important s'il s'agissait seulement d'introduire la mathématique moderne à l'école élémentaire avec le dessein de former de bons élèves pour l'enseignement secondaire. Ce que nous cherchons à mettre en évidence, c'est le rôle primordial que joue le raisonnement

logico-mathématique dans la vie de chaque individu, quel que soit son niveau de scolarisation. A quoi servirait la connaissance des algorithmes de calcul si l'on ne savait pas où, quand et comment les utiliser ?

L'accélération de l'évolution des structures de la société et celle du développement de la science rendent impossible tout pronostic quant aux connaissances dont auront besoin en 1990 les enfants qui entrent aujourd'hui à l'école. En revanche, le développement de toutes les capacités virtuelles du raisonnement, l'aptitude à l'organisation et à la structuration de données aussi bien verbales que spatiales ou numériques constituent des outils qui demeureront de première importance quel que soit le monde social et professionnel dans lequel vivront les jeunes de demain.

- b) Le second objectif consiste en l'élaboration d'un langage rigoureux et sans ambiguïté. A l'école primaire, ce langage reste en liaison étroite avec la pensée et la langue naturelles.

Il serait faux de croire que l'expression verbale constitue le seul langage dont nous disposons. Dès son plus jeune âge, l'enfant assimile et utilise un langage symbolique très riche et très complexe. Dans tous les actes de la vie quotidienne, nous obéissons à des signaux, nous réagissons à des informations qui nous parviennent sous de multiples formes. Le langage mathématique constitue l'un de ces moyens d'information. Il se caractérise par une rigueur et une économie supérieures à n'importe quel autre type de langage.

L'école a donc pour mission de faire pénétrer l'enfant dans les arcanes du langage mathématique comme elle se doit de développer ses capacités de compréhension et d'expression verbale.

Mais il faut, en ce domaine, se méfier des excès et des abus. Dans certains cas, le souci de rigueur conduit le maître à engager ses élèves dans l'utilisation d'un langage mathématique désincarné sans lien avec le réel. A l'école élémentaire en tout cas, dans les premières années de l'enseignement secondaire probablement, le langage mathématique doit être sous-tendu par une expression parallèle des mêmes concepts avec les mots et les gestes de tous les jours. Dans toutes les situations où le symbolisme mathématique apparaît, l'enfant doit être capable de le dire, de le décrire, par des manipulations d'objets, par le geste, par le dessin ou par la parole. Ce n'est que lorsque le symbole sera devenu absolument clair, qu'il aura été complètement intériorisé, qu'il sera reconnu et compris dans tous les cas, que l'explicitation par la langue naturelle deviendra superflue.

- c) L'enseignement de la mathématique favorise la construction d'un mode d'appréhension et d'organisation du réel.

Pour agir il faut connaître ; pour connaître il faut comprendre ; et pour comprendre il faut être capable d'ordonner, de sérier, de classer, de distinguer les éléments, les concepts, les idées que la vie nous apporte en vrac. L'un des objectifs de l'apprentissage de la mathématique consiste donc en la construction de modèles permettant de mettre de l'ordre dans une situation nouvelle afin de pouvoir en tirer toutes les informations utiles.

Les activités de tri, de classement, de mise en relation portant sur des objets, des mots, des nombres, des symboles, des idées occuperont une place importante dans l'activité de l'enfant afin de munir celui-ci des premiers éléments propres à la démarche scientifique, d'exercer ses facultés de perception et d'abstraction, d'amorcer la construction de l'induction.

- d) L'enseignement de la mathématique développe les capacités d'adaptation à des situations nouvelles et encourage la découverte de stratégies.

Est-il besoin de le rappeler ? Nous vivons une époque dont l'une des caractéristiques essentielles est le changement. La formation scolaire devra être remise en question plusieurs fois, si ce n'est de manière permanente, au cours de la carrière professionnelle.

Dans la plupart des manuels scolaires, les problèmes posés aux élèves contiennent déjà la réponse à trouver. Rares sont les situations dans lesquelles un choix peut intervenir. Dans une perspective nouvelle, les problèmes devraient être bien plus larges de telle sorte que l'enfant, en présence d'une situation donnée, en vienne peu à peu à formuler lui-même des questions, à émettre des hypothèses et à trouver les moyens propres à leur vérification.

Un enseignement bien compris devrait conduire l'enfant, confronté avec un problème, à faire l'inventaire des actions possibles puis à éliminer les moins probables ou les moins économiques, à construire enfin un modèle d'action permettant d'aboutir au résultat désiré.

- e) L'enseignement de la mathématique met l'accent sur l'activité, la curiosité, l'autonomie, la créativité.

Bien que sa valeur ait été reconnue depuis un demi-siècle, l'activité propre à l'enfant n'occupe que rarement la place qu'elle devrait avoir dans la pratique scolaire. Il est pourtant bien connu que la mathématique ne peut s'assimiler que par l'action personnelle du sujet. L'un des moteurs de cette action réside indiscutablement dans la curiosité intellectuelle. L'enfant sera placé dans des conditions telles que l'école, loin de le freiner et d'encourager une attitude passive, lui donnera toutes les possibilités de développer sa curiosité naturelle. Cette attitude ne va passans une certaine autonomie. L'enfant doit être encouragé à prendre des initiatives, à formuler lui-même les problèmes qu'il cherchera à résoudre, de telle sorte que, aussitôt que possible, il soit en mesure d'assumer personnellement une partie de sa formation. Enfin, l'enseignement offrira des possibilités de création individuelle. La mathématique se prête admirablement à l'invention et au jeu. Elle peut largement contribuer au développement de facultés créatrices qui seront très précieuses à l'homme tant dans son activité professionnelle que dans les temps de loisir qui prennent une place toujours plus importante dans la vie moderne.

- f) L'enseignement de la mathématique assure l'acquisition d'un nombre limité de connaissances.

Les notions véritablement indispensables à un enfant quittant l'école primaire sont relativement peu nombreuses. Dans l'enseignement traditionnel, elles se résumaient à la connaissance des quatre opérations arithmétiques et du système métrique et à quelques notions relatives à la géométrie et aux fractions ordinaires.

Dans un enseignement renouvelé, ces notions de base restent nécessaires mais la restructuration de l'enseignement devrait leur donner un caractère plus large et plus souple de telle sorte que la reconstruction vienne suppléer à la mémoire chaque fois que celle-ci se révèle déficiente.

13.2 Les contraintes du système

Dans un système scolaire officiel et public, la mise en place d'une réforme ne peut s'effectuer sans que l'on tienne compte de l'ensemble des conditions qui régissent l'organisation scolaire. La liberté d'action serait beaucoup plus grande si la recherche était limitée à quelques écoles expérimentales. Cependant, notre but étant d'aboutir à un renouveau de l'enseignement dans toutes les classes, il aurait été difficile, à partir de classes pilotes seulement, d'assurer le succès lors de la généralisation.

La contrainte la plus importante provient de la diversité des élèves.

L'enseignement sera assez large, assez souple et assez différencié pour que tout élève, quels que soient ses aptitudes intellectuelles ou son environnement socio-culturel, soit confronté à des tâches adaptées à son niveau, à propos desquelles il ait la possibilité de se réaliser, de réussir, de créer.

Si l'adaptation de l'enseignement aux aptitudes intellectuelles de l'enfant est partiellement réalisée, il n'en va pas de même en ce qui concerne le milieu socio-culturel. Le langage employé dans la classe, les devoirs à domicile, l'appui attendu par le maître de la famille sont les mêmes pour tous. Un certain nombre d'élèves voient ainsi une bonne partie de leurs chances d'accès à la culture gâchées, par le fait du système, dès le premier jour de l'école.

En particulier, l'école souhaite à juste titre une collaboration étroite avec la famille. Mais cette collaboration dépasse les limites admissibles quand elle sous-entend que la famille doit prendre en charge le premier apprentissage de la lecture, celui des tables d'addition et de multiplication, ou la résolution des problèmes que l'enfant n'a pas su faire en classe. Si un appui supplémentaire est nécessaire à certains élèves, c'est indiscutablement le rôle et la mission de l'école de prendre les dispositions lui permettant d'assumer cette tâche.

La seconde contrainte concerne le corps enseignant.

L'enseignement pourra être assumé avec efficacité par tout instituteur ou toute institutrice, compte tenu des différences individuelles au niveau de l'intérêt pour la mathématique et des connaissances personnelles. L'enseignant, autant que l'élève, doit éprouver en face de sa tâche un sentiment de satisfaction et de sécurité.

L'opinion publique admet, d'une manière générale, que l'enseignement à de jeunes enfants n'implique pas, de la part du maître, des connaissances très poussées. Un grand nombre des mesures prises dans diverses régions afin de pallier la pénurie du corps enseignant montrent que les autorités scolaires ne sont pas loin d'adopter le même point de vue. Ceci représente un fait qu'il serait dangereux de sous-estimer. A moins de modifications considérables dans la formation des maîtres, à moins de la mise en place d'un dispositif de formation permanente très efficace, pendant très longtemps encore, l'instituteur ou l'institutrice, quelques exceptions mise à part, n'aura qu'une connaissance limitée des notions mathématiques qu'il enseigne. Le lecteur non averti pensera que, pour enseigner les quatre opérations arithmétiques, il n'y a pas besoin d'être grand clerc. Nous lui accorderons que, si l'objectif de l'enseignement est l'assimilation de quelques techniques de calcul et de quelques modes d'emploi, des connaissances modestes pourraient suffire. Mais dans ce cas, il semble qu'en enseignement programmé de qualité remplacerait avantageusement celui laissé à la liberté et à la fantaisie du maître.

Nos objectifs étant plus vastes, les connaissances exigées du maître s'accroissent de manière considérable. Non seulement l'instituteur devrait dominer une bonne partie des fondements de la mathématique - et nous pensons principalement à l'algèbre, à l'arithmétique, à la théorie des nombres, à la géométrie, à la théorie des ensembles et des relations - mais encore il lui faudrait maîtriser assez la psychologie des processus cognitifs pour être à même de placer l'enfant dans des conditions d'apprentissage adéquates.

La conception du métier d'instituteur comme celui d'un généraliste, d'un homme ou d'une femme chargé de la totalité de l'enseignement, rend très difficile, voire impossible, que chaque maître possède la formation mathématique et psychopédagogique qui lui permettrait de créer lui-même les conditions d'apprentissage les plus favorables.

Il convient donc que les responsables d'une réforme ne négligent point cet aspect du problème. Le programme, les moyens d'enseignement, les jeux et les exercices doivent être conçus en fonction des connaissances et des possibilités des maîtres qui devront les utiliser. Tout maître d'école, quels que soient son goût pour la mathématique et ses connaissances dans cette discipline, doit être muni des instruments lui permettant d'assurer un enseignement de qualité. Cette contrainte nous obligera parfois à limiter nos ambitions. Mais en corollaire, il faut que les enseignants intéressés plus spécialement par la mathématique disposent d'un programme et jouissent de libertés qui leur laissent la possibilité de s'exprimer pleinement et d'être ainsi un exemple pour leurs collègues et un moteur pour l'avancement de la pédagogie.

La troisième contrainte est liée à la société, plus particulièrement à la famille et aux employeurs.

Les parents, par le phénomène bien connu selon lequel l'âge d'or est rarement placé dans le futur, ont une forte tendance à idéaliser leurs souvenirs scolaires et à désirer, pour leur progéniture, la même école que celle qu'ils ont eux-mêmes connue. Le problème se révèle d'autant plus crucial lorsque le changement provoque un déphasage aussi total que celui qui intervient dans la réforme des mathématiques. L'introduction d'un nouveau langage et de nouvelles techniques est une cause d'incompréhension pour les parents. Ceux-ci supportent de ne pouvoir que partiellement suivre le travail de leurs enfants lorsque ces derniers atteignent l'enseignement secondaire mais ils tolèrent mal de ne pas comprendre l'exercice proposé à un enfant de sept ou huit ans. Le problème est le même au niveau des employeurs. Bien que leur personnel n'ait jamais l'occasion d'utiliser certaines des notions figurant dans les plans d'études antérieurs, ils en admettent difficilement la suppression tandis qu'ils ne voient guère ce qu'ils pourraient tirer des notions nouvelles.

Dans les deux cas, une information intensive est indispensable afin que les éléments d'ordre subjectif, passionnel, voire même politique, ne viennent pas ruiner momentanément les efforts consentis pour une réforme dont on regretterait par la suite qu'elle n'ait pas abouti.

13.3 Les hypothèses de travail

La rédaction d'un programme repose sur une définition des objectifs assignés à l'enseignement. L'élaboration d'une méthodologie demande en outre la formulation d'un certain nombre d'hypothèses relatives aux moyens d'atteindre ces objectifs, qui définissent les grandes lignes présidant à l'action d'enseignement et à l'acte d'apprentissage.

- a) La mathématique ne s'enseigne pas, elle s'apprend. L'activité de l'enseignant consiste donc principalement à placer les enfants dans des situations propices à une construction personnelle de leur propre édifice logico-mathématique.

Cette affirmation brutale signifie que le rôle du maître est, en mathématique, différent de ce qu'il est dans d'autres disciplines. La différence est d'ailleurs présente dans les termes mêmes. On enseigne le vocabulaire ou l'histoire mais on développe l'expression écrite ou le raisonnement logico-mathématique. L'école primaire a, jusqu'ici,

enseigné l'arithmétique comme elle enseignait les autres branches. Il n'y avait pas de différence qualitative entre l'étude des sommets du Jura, celle des principales dates marquant l'histoire suisse ou celle de la multiplication. Dans chaque cas, le maître donnait l'information que l'enfant devait répéter et mémoriser avant d'être mis en présence de situations dans lesquelles il lui fallait retrouver dans sa mémoire ces données pour les utiliser.

Or les conditions d'apprentissage de la mathématique sont fort différentes de celles des autres disciplines. Avant même l'entrée à l'école, l'enfant a eu l'occasion de faire de nombreuses expériences propres à développer et à affiner son raisonnement. Le rôle de l'école consiste donc à augmenter et à enrichir le champ d'expérience de l'enfant, à mettre celui-ci en présence de situations nouvelles dans lesquelles ses schémas antérieurs ne seront plus suffisants de telle sorte que, par tâtonnements, par essais et erreurs, il en construise de nouveaux, plus puissants, qui lui permettent de franchir la difficulté. Tout l'art du pédagogue consistera donc à trouver les situations les plus enrichissantes, celles dans lesquelles l'enfant accumulera le maximum d'expériences dans le minimum de temps, celles qui conduiront le plus sûrement vers le but recherché.

- b) Le domaine numérique ne représente qu'un des aspects de la mathématique. Sa construction est intimement liée à la logique des classes et à la relation d'ordre. L'apprentissage du calcul numérique ne peut donc précéder les autres activités mathématiques.

Il n'est plus besoin d'insister sur le fait que des activités d'ordre qualitatif doivent précéder les activités numériques. Les travaux de Piaget ont abondamment démontré la primauté des classifications et des sériations qualitatives sur les mêmes opérations concernant la construction du nombre.

Grâce à la mathématique moderne et à la restructuration qu'elle a apportée entre les diverses branches des mathématiques, nous connaissons mieux, aujourd'hui, les relations existant entre les domaines algébrique, géométrique, numérique. L'étroite interdépendance de ces domaines et l'unicité des structures sous-jacentes nous autorisent à croire qu'il y a un intérêt évident à ce que l'apprentissage des structures s'effectue parallèlement sur des données appartenant aussi bien aux collections qualitatives et aux notions spatiales qu'au domaine numérique, l'aspect symbolique très abstrait de ce dernier constituant un obstacle supplémentaire pour l'enfant.

Il en découle que l'apprentissage de l'arithmétique, qui représentait quasiment la seule activité de l'école primaire, doit faire place à un apprentissage conjoint, adapté bien sûr à l'âge des élèves, des notions algébriques, d'ordre et topologiques dans lesquelles les nombres constituent un ensemble parmi d'autres.

- c) Les activités de tri, de classement, d'organisation de données, ainsi que l'établissement de relations, sont indispensables à la construction de la pensée logique. Les premiers éléments de la logique apparaissent dans l'enseignement dès le début de la scolarité.

Dans la perspective moderne, la mathématique s'applique non seulement au nombre mais à toutes sortes de choses. En règle générale, une opération mathématique porte sur un ensemble d'éléments qui doit être clairement défini. Restons dans le domaine numérique pour citer un exemple particulièrement simple. Dans l'étude de la soustraction, il est de première importance de savoir si l'opération s'applique sur l'ensemble des nombres entiers ou sur celui des nombres relatifs.

Les notions d'ensembles et les concepts logiques qui peuvent leur être rattachés constituent des instruments indispensables pour la définition des champs sur lesquels s'appliqueront les opérations et se définiront les structures mathématiques. De même, la notion de relation, qui permet d'établir des correspondances entre les éléments ou entre les ensembles, est indispensable à la construction de l'édifice mathématique.

Les structures logiques, qui permettent à l'individu d'assimiler l'inclusion des classes et les classifications multiplicatives, lui fournissent un instrument de travail propre à faciliter l'organisation systématique d'informations de n'importe quelle nature. Elles ont une portée qui dépasse largement le seul apprentissage de la mathématique. Elles forment un instrument de pensée indispensable pour l'assimilation des connaissances et donnent à l'individu des possibilités de compréhension et d'action dans la plupart des activités où le raisonnement entre en jeu.

- d) L'environnement spatial fournit un champ d'expérience trop peu exploité par l'enseignement de type traditionnel. L'exploration de l'espace, tout au long de la scolarité élémentaire, doit trouver sa place dans le cadre des activités visant à la construction du raisonnement logico-mathématique et du nombre.

La géométrie apparaît, dans le plan d'études genevois, en cinquième année seulement, c'est-à-dire, à l'âge de dix ans. Sans préparation préalable, l'enfant doit apprendre à construire des figures géométriques et assimiler les propriétés des principaux quadrilatères. Nous aurons une fois encore recours à Piaget pour en justifier une approche dès le début de la scolarité. Cette géométrie intuitive, appuyée sur de nombreuses expériences concrètes, permettra non seulement d'assimiler plus aisément les notions géométriques de base, mais aussi l'utilisation de la notion de coordonnées avec toute l'exploitation qui peut en découler au niveau des représentations d'applications affines ou linéaires, ainsi que l'élaboration, toujours au stade intuitif, des premiers éléments du concept de groupe.

- e) Les activités mathématiques favorisent l'élaboration d'un langage de plus en plus rigoureux. Cette élaboration ne peut s'effectuer que si l'enfant exprime ses observations dans son langage naturel quotidien. Le langage formalisé, quelque soit le degré de formalisation, n'apparaîtra que lorsque la notion sous-jacente pourra être totalement explicitée, et cela de plusieurs manières, au moyen du langage usuel.

Nous avons déjà précisé, dans le paragraphe consacré aux objectifs, l'importance du langage dans la mathématique. Nous n'y reviendrons donc que pour insister une fois de plus sur l'erreur trop souvent commise qui consiste à exiger de la part de bambins de six à sept ans l'usage d'un langage ésotérique que l'enfant ne peut rattacher à son parler quotidien, ce qui revient à remplacer des stéréotypes vides d'un contenu à la portée de l'enfant par d'autres concepts tout aussi dépourvus de signification.

- f) L'enseignement ne peut faire totalement abstraction du contexte sociologique dans lequel il est inséré. L'enfant doit être muni, en temps utile, des connaissances et des techniques indispensables à son intégration dans la société.

Dans certaines expériences conduites à l'étranger, dans des écoles expérimentales et non à l'échelon d'une région, les initiateurs des réformes ont mis exclusivement l'accent sur la construction du raisonnement logico-mathématique, n'attachant aucune importance à l'assimilation de notions qui, comme la table de multiplication ou la capacité de vérifier la monnaie rendue lors d'un achat, ne présentent peut-être pas un grand intérêt sur le plan de la construction de l'édifice mathématique mais sont tout de même nécessaires dans la vie de tous les jours.

Il faut, dans ce domaine, raison garder, et doter l'enfant en temps utile de ce que nous appellerons un bagage technique suffisant. Cependant, il conviendra de ne pas mêler les deux plans ni de prendre l'un pour l'autre. Ce n'est pas parce que l'enfant saura effectuer une multiplication et en trouver le résultat exact qu'il fera du même coup la preuve qu'il domine les propriétés de cette opération. Deux postulats doivent être réalisés. D'une part, l'acquisition de ces techniques ne doit pas empiéter outre mesure sur le temps disponible. Dans de nombreux cas, il est préférable de retarder l'apprentissage d'un concept afin d'y consacrer le minimum de temps. D'autre part, cet apprentissage ne doit pas constituer un barrage, une cause d'échec, pour l'enfant. C'est le développement des structures logico-mathématiques qui est véritablement important. Les techniques et l'acquisition des tables de calcul ne seront pas négligées, mais il convient de ne pas leur accorder plus de poids qu'elles n'en méritent au risque de paralyser l'effort d'un enfant pour la simple raison qu'il met plus de temps que ses camarades à mémoriser tous les produits de la table de Pythagore.

13.4 Le facteur pédagogique

Pour atteindre les objectifs fixés, une progression rigoureuse des difficultés, élaborée sur les données psychologiques, doit être établie. Mais cela n'est pas suffisant. Deux conditions sont nécessaires : il convient d'abord que chaque élève, à n'importe quel moment de sa scolarité, soit confronté à des tâches à sa portée. Les exigences d'un enseignement collectif ne permettent que difficilement, lorsque le problème posé est restreint, une individualisation suffisante. Il s'agira donc, sans aller forcément à la solution idéale qui consisterait en la création d'un atelier de mathématique où de petits groupes d'élèves travailleraient chacun à un problème particulier, de fournir à l'ensemble que constitue une classe des situations suffisamment larges et riches pour que, du plus faible au mieux doué, tous les élèves soient en mesure d'avoir une activité fructueuse.

La seconde condition, liée d'ailleurs à la première, est la nécessité d'une transformation d'un enseignement essentiellement individualiste en un enseignement dans lequel les relations sociales, la confrontation des points de vue, prennent une part prépondérante. Le développement du raisonnement logico-mathématique exige que l'enfant se dégage progressivement d'un seul point de vue égocentrique pour être en mesure de juger d'une situation en fonction de plusieurs points de vue. Lorsque, confrontés à un problème, plusieurs enfants auront la possibilité de s'exprimer, de se contredire, de se corriger mutuellement, de s'affronter peut-être, avant de parvenir à une solu-

tion satisfaisante pour tout le monde, lorsqu'ils auront été contraints, pour se faire comprendre, d'organiser dans le temps et l'espace, des objets, des actions, puis des idées, avant d'exprimer ces idées dans un langage commun de plus en plus rigoureux, ils en tireront un enrichissement bien plus grand et n'auront nul besoin de répéter sans cesse le même type d'exercices.

Certes, dans certains cas, la mémorisation, la répétition, peuvent contribuer à une plus grande dextérité mais elles ne doivent en aucun cas précéder l'analyse logique et la compréhension profonde sous peine de masquer des lacunes qui risquent de devenir irréversibles.

On le conçoit aisément, dans cette nouvelle perspective, la tâche du maître n'est pas facilitée. Il devient plus difficile d'assurer le contrôle de son enseignement. Les étapes, les paliers, sont moins marqués. La part laissée à l'initiative et à la créativité des élèves est très grande. Mais c'est dans le domaine de la relation affective entre le maître et ses élèves que se marque la plus grande différence. L'instituteur n'est plus celui qui sait, qui enseigne, qui contrôle, et qui déclare que le problème est juste ou faux. Mais il est celui qui propose la situation nouvelle, qui incite à la recherche, qui relance la discussion, qui formule des hypothèses, qui suggère discrètement des voies à explorer jusqu'à ce que l'évidence éclate aux yeux de tous et que toutes les vérifications et les contre-épreuves soient satisfaisantes.

Les essais montrent que cette voie difficile est passionnante et qu'elle est très riche en enseignements. Souvent, les élèves vont plus loin qu'on ne l'avait prévu. Leur souci de rigueur dans la logique et de précision dans l'expression, dès l'âge de six ans, dépasse dans certains cas, les exigences de la maîtresse. L'ordre des valeurs est parfois modifié; ainsi des élèves qui donnaient l'impression d'être peu doués font des progrès considérables lorsqu'ils ont la possibilité d'avancer à leur rythme propre et de se valoriser par des réussites. Certes, il n'y a pas de miracle, mais l'effacement du maître par rapport à la tâche à accomplir et au problème à résoudre ainsi que l'accroissement des relations sociales entre les élèves modifient fréquemment d'une manière bénéfique le climat affectif de la classe en favorisant l'épanouissement de chaque écolier.

Pour assurer à l'enseignement un déroulement harmonieux, un programme qui en fixe les différentes étapes est nécessaire. Mais ce programme représente un cadre assez large à l'intérieur duquel une adaptation au développement individuel de l'enfant est indispensable. Toute notion nouvelle doit se rattacher aux connaissances acquises

préalablement par l'élève. De ce fait, le programme définit le moment à partir duquel les différentes notions peuvent être abordées, leur assimilation complète pouvant être plus ou moins rapide. En corollaire, le programme est conçu de façon à ce que la même notion soit reprise en plusieurs étapes, chaque étape permettant d'en approfondir les divers aspects.

Pour que tous les élèves d'une même classe soient confrontés à des problèmes compatibles avec leur niveau, les situations qui leur sont proposées sont aussi larges que possible et demandent plusieurs réponses dont le degré de difficulté varie.

Dans une large mesure, les données, les matériels, sur lesquels s'exerce la réflexion de l'enfant seront conçus de manière à ce qu'ils contiennent en eux-mêmes une possibilité de contrôler l'exactitude de la réponse. Le maître n'indique pas à l'élève si sa réponse est juste ou fausse ; il lui suggère des vérifications et lui propose des contre-exemples jusqu'à ce que la solution soit acceptée comme une évidence. Cette attitude pédagogique implique l'intervention de la discussion entre les élèves, de la confrontation des points de vue. L'enfant qui doit défendre sa position est obligé d'examiner avec un esprit critique les contre-propositions faites par ses camarades et de rechercher des arguments valables pour les réfuter. Il en résulte que ce n'est plus la multiplicité des exercices répétitifs qui fixe la notion dans l'esprit de l'enfant mais bien l'étude approfondie d'un problème donné.

Cette manière de procéder suppose que, à certains moments la classe travaille en groupes restreints. Les activités de groupes peuvent être réalisées de deux manières : tantôt, le maître préférera travailler avec une partie de la classe tandis que les autres élèves sont occupés à des tâches individuelles ; tantôt, la classe entière sera divisée en petits groupes chargés chacun d'élucider un problème particulier, l'instituteur passant d'un groupe à l'autre pour guider le travail, apporter un conseil, suggérer une vérification.

La mathématique ne peut être assimilée par la répétition de modèles stéréotypés. Elle exige une action du sujet qui doit intérioriser les modèles par une construction personnelle.

Cette construction est favorisée par de nombreuses comparaisons entre des situations semblables portant sur des matériels différents ou entre des situations légèrement différentes mais axées sur un même matériel, celui-ci étant constitué d'objets concrets, de représentations d'objets, de données verbales ou de données numériques.

13.5 Esquisse d'une méthodologie

Le terme d'esquisse définit bien notre intention quant à la portée des lignes qui vont suivre. L'élaboration d'une méthodologie complète, recouvrant toute la scolarité primaire et présentant dans le détail toutes les activités qui peuvent être proposées aux élèves représente un travail de très longue haleine, qui demandera encore plusieurs années de recherches, et qui surtout ne peut être le fruit d'un effort solitaire mais nécessite la collaboration de tout un groupe de chercheurs et d'enseignants.

Nous nous bornerons donc à tracer quelques lignes directrices, à ébaucher quelques principes d'action qui pourraient servir de canevas à un ensemble de travaux dans lesquels chacun des aspects de la mathématique sera développé de manière plus détaillée.

Dans le même esprit, nous ne nous attarderons guère sur le premier apprentissage de la mathématique. De nombreuses publications ont déjà paru à ce sujet et nous renvoyons plus particulièrement le lecteur à un ouvrage qui s'est largement inspiré de l'expérience genevoise. (57)

Dans les pages qui suivent, on trouvera donc quelques indications destinées à compléter, à expliciter les données figurant dans le programme et leurs articulations les unes avec les autres. Il va sans dire que tous les éléments avancés découlent soit de l'expérience conduite dans les classes, soit des travaux de contrôle auxquels furent soumis les élèves. Il convient encore de relever que les indications relatives aux degrés dans lesquels sont présentées les notions ne constituent qu'une approximation et que les différences individuelles dans le niveau de développement de l'enfant exigent que l'on admette une marge très large. C'est la raison pour laquelle nous essayerons de déterminer le moment où est abordée une notion nouvelle et non celui où toute une classe doit l'avoir maîtrisée.

14. LES ENSEMBLES

14.1 Notions d'ensembles

La notion intuitive d'ensemble est fondamentale dans le développement du raisonnement logico-mathématique de l'enfant. Spontanément, celui-ci effectue des comparaisons et partage le réel en diverses classes. Dans le langage courant, le mot "ensemble" a de nombreux synonymes : collection, tas, paquet, groupement, famille, etc.. Chaque fois que l'on réunit, physiquement ou par la pensée, un certain nombre d'éléments isolés, on constitue un ensemble.

Pour qu'un ensemble soit défini, il faut qu'aucune hésitation ne subsiste quant à savoir si un objet quelconque appartient ou n'appartient pas à cet ensemble. Il existe deux manières de définir un ensemble :

- Définition en extension :

énumération de tous les éléments de l'ensemble. Dans ce cas, une propriété commune à tous les éléments n'est pas indispensable, l'ensemble étant créé par simple décision.

- Définition en compréhension :

énoncé d'une ou de plusieurs propriétés communes à tous les éléments de l'ensemble.

C'est le second type de définition qui est le plus accessible à l'enfant. Grouper tous les éléments rouges, mettre dans une boîte toutes les perles, sont des activités dont l'enfant est capable au début de la scolarité primaire. Cependant, le problème se complique lorsque les éléments sur lesquels s'exerce la pensée offrent plusieurs sortes d'attributs. Ainsi, en présence de carrés et de disques de différentes couleurs et de différentes dimensions l'enfant aura tendance, en réponse à la demande de grouper les éléments rouges, à effectuer plusieurs groupements par taille ou par forme, sans pouvoir dégager le concept de couleur en faisant abstraction des autres attributs.

Durant les deux premières années de scolarité, de nombreux jeux, portant sur des matériels très divers, auront pour objet la description exhaustive des éléments en jeu, l'énumération de leurs propriétés et la partition de l'ensemble en sous-ensembles définis par l'une d'entre celles-là. Les exercices permettront à l'enfant d'acquérir une méthode de description des objets, de découvrir les différences et les ressemblances entre deux figures, de décrire ces figures au moyen d'énoncés soit affirmatifs, soit négatifs.

Cette première phase conduira assez rapidement à l'idée que l'on pourrait tenir compte simultanément de deux critères, ce qui nous conduit à la notion de classification multiplicative. Cependant, avant de quitter les premières notions d'ensembles, il faut rappeler que le problème de l'appartenance ou de la non-appartenance se reposera, à certains moments, en quatrième ou en cinquième année, lorsque les éléments à grouper ne seront plus des objets concrets mais, par exemple, des nombres ou des figures géométriques. Il s'agira, en temps utile, de reprendre des exercices précisant si tel ou tel élément appartient ou n'appartient pas à tel ou tel ensemble.

17.2 Les classifications multiplicatives.

Parallèlement à la notion première d'ensemble, apparaissent les classifications multiplicatives. Les travaux de Piaget ont montré l'interdépendance existant entre la construction des opérations additives de classes et celle des opérations multiplicatives.

"D'un tel point de vue, il n'y a pas, d'abord élaboration des structures additives, et ensuite généralisation de ces structures à deux ou plusieurs dimensions sous la forme multiplicative : il y a, à tous les niveaux, certaines formes, rudimentaires ou achevées, de classification et ces formes peuvent aussi bien s'appliquer à un seul critère qu'à plusieurs critères à la fois (coordonnés en cas d'achèvement ou mélangés de diverses manières, aux niveaux plus élémentaires) : dans le premier cas la structure est additive et dans le second multiplicative, sans aucune opposition essentielle entre elles deux.

Cette solidarité de développement, jointe aux synchronismes des étapes respectives, montre ainsi que les structures additives et multiplicatives de classes constituent une même grande organisation opératoire, malgré les différences figurales et les différences apparentes de complexité." (58)

Cette position nous autorise à proposer aux enfants, dès le début, des matériels comportant plusieurs propriétés. De cette manière, il s'agira tantôt d'abstraire un seul critère et d'effectuer une partition de l'ensemble des éléments, tantôt de tenir compte de deux propriétés à la fois et de préparer ainsi l'intersection.

Selon Piaget, la notion d'intersection est accessible à environ 50 % des enfants de 7-8 ans et 80 % des sujets de 9-10 ans. Il paraît donc

raisonnable d'aborder l'idée d'intersection en fin de première année et de développer les activités de ce type en deuxième et en troisième années.

D'une manière générale, les enfants sont mis en présence d'un matériel - matériel qui changera aussi souvent que possible - conçu de telle sorte que l'on puisse distinguer au moins quatre propriétés non ambiguës. Par des jeux et des manipulations, l'enfant construira progressivement des classifications tenant compte de deux, puis de trois critères. Progressivement, il sera amené à la découverte de toutes les classifications possibles. Ainsi, dans l'univers des blocs logiques de Dienes, qui se distinguent selon quatre propriétés (Forme, Couleur, Taille, Epaisseur), il est possible d'effectuer six classifications multiplicatives jouant sur deux propriétés (FC ; FT ; FE ; CT ; CE ; TE) et quatre comprenant trois critères (FCT ; FTE ; FCE ; CTE). On ne soulignera jamais assez que l'exercice ne peut être fructueux que si l'enfant doit se livrer à une véritable activité, consistant en un examen attentif du matériel proposé, afin d'effectuer la classification. La reproduction ou la répétition, le lendemain, du même classement sur le même matériel n'aurait aucune signification et ne constituerait qu'une perte de temps.

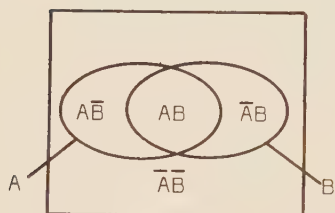
Nous avons déjà insisté sur l'importance de la liaison entre manipulation, verbalisation et représentation. C'est donc à propos de la représentation des situations que nous allons définir les activités possibles.

14.3 Représentations d'ensembles

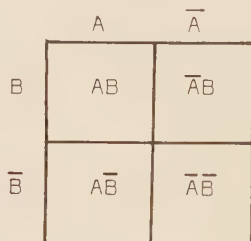
Dans de nombreux ouvrages destinés à l'enseignement élémentaire, un seul mode de représentation des ensembles est présenté : le diagramme de Venn. Ceci provient en général du fait que les auteurs se placent du seul point de vue du contenu mathématique et cherchent simplement à préparer le langage ensembliste employé dans l'enseignement secondaire. Notre ambition est plus large. Ce qui paraît important, c'est de munir l'enfant de plusieurs moyens de représentation des ensembles. D'une part, la comparaison des différents diagrammes utilisés aura un effet consolidateur de la notion ; d'autre part, la multiplication des types de représentations augmentera les chances que la notion soit comprise et assimilée par un plus grand nombre d'élèves. En effet, celui qui éprouve de la difficulté à comprendre le diagramme de Venn sera peut-être plus à l'aise dans l'utilisation d'un arbre de classement et pourra revenir au diagramme de Venn après coup, l'inverse étant naturellement tout aussi possible.

Nous distinguerons donc trois types principaux de représentations et quelques autres manières de classer des éléments.

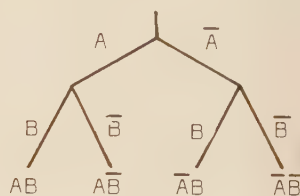
Les trois représentations utilisées tout au long de la scolarité élémentaire et présentées quasi-simultanément aux enfants sont le diagramme de Venn, celui de Carroll et l'arbre de classement.



Venn



Carroll



Arbre

Chacun d'entre eux présente ses caractéristiques propres. L'arbre de classement peut être considéré comme une véritable "machine à trier" et permet un traitement séquentiel. L'enfant sépare d'abord A de non A, puis reprend l'un après l'autre les deux sous-ensembles obtenus pour en effectuer la partition B-non B. C'est aussi celui qui permet de tenir compte du plus grand nombre de critères. A partir de la quatrième année, les enfants sauront jouer sur quatre, voire même cinq propriétés sans difficulté.

Le diagramme de Carroll a pour qualité principale la bonne représentation de la double négation. Dans le diagramme de Venn, pour peu que, comme on le voit trop souvent, le maître néglige le dessin du rectangle enveloppant symbolisant le référentiel — et même sans cette précaution —, l'enfant ne perçoit en général que les trois plages AB, $A\bar{B}$ et $\bar{A}B$. Le diagramme de Carroll a une forme qui permet une meilleure focalisation de l'attention sur la double négation.

Le diagramme de Venn, enfin, est celui qui permettra probablement le mieux la représentation de l'idée d'intersection ou de réunion. Il est nécessaire ici de préciser une chose. On est trop souvent tenté de croire que l'enfant, parce qu'il sait représenter une situation au moyen d'un diagramme de Venn ou de Carroll, comprend ipso facto la notion d'intersection. En réalité, il n'en est rien. Nous avons souvent observé que l'enfant effectue une partition en quatre sous-ensembles et que, ce qui est d'ailleurs tout à fait normal avant l'âge de 8 ans, l'inclusion de l'intersection AB dans l'ensemble A ou dans l'ensemble B n'est pas reconnue. Il y a donc lieu de distinguer les objectifs fixés aux différents exercices proposés aux enfants

et de prendre en considération qu'une activité de classement ne conduit pas sans autre aux opérations sur les ensembles.

En deuxième et troisième années, les exercices de classement portant sur des matériels concrets seront nombreux et variés. A partir de la quatrième année, les mêmes classements pourront intervenir sur des données numériques, les multiples et les diviseurs des nombres par exemple.

D'autres types de classements pourront être abordés à partir des trois représentations de base. L'extension du diagramme de Carroll à une partition non dichotomique conduira à ce que certains auteurs appelle le "tableau bien arrangé", c'est-à-dire le tableau à double entrée.

	R	V	B	J	N
Carré					
Triangle					
Disque					

Cette représentation facilitera la liaison entre les idées de classement, de couple et de produit cartésien. En quatrième et en cinquième années, le désir d'aborder des arbres de classement tenant compte de nombreux critères donnera au maître la possibilité d'une recherche sur l'emploi des cartes à perforation marginale.

L'exploitation de situations très variées devrait donner à l'enfant au terme de la scolarité primaire, la capacité de mettre de l'ordre dans n'importe quel problème et de trouver, dans chaque cas, la représentation la plus claire et la plus utile à la résolution du problème.

14.4 L'inclusion

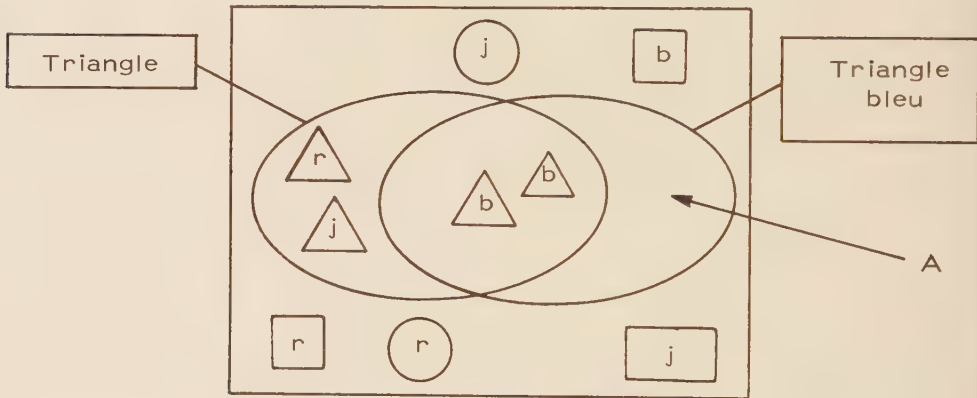
L'inclusion pose un problème difficile à résoudre. D'une part, ainsi que la démontré Piaget, c'est une notion qui se construit tardivement ni l'inclusion hiérarchique $A < B < C$, etc. ni la quantification de l'inclusion ne sont acquises au début du stade des opérations con-

crêtes, mais seulement au cours de la seconde moitié de ce stade III ou même aux confins du stade des opérations formelles". (59)

D'autre part, bien que l'idée d'inclusion soit indispensable à la compréhension de la soustraction, il est difficile de faire admettre que cette opération n'apparaisse dans les programmes qu'à l'âge de 10 ou 11 ans.

Notre propre expérience confirme ce point de vue. Nous avons le souvenir d'une classe dont la moyenne d'âge dépassait 8 ans et à qui l'institutrice avait posé le problème suivant :

- Trouvez les éléments que l'on peut mettre dans la plage A ?



Les élèves, travaillant en groupe, avaient éprouvé le besoin de passer en revue un à un tous les éléments contenus dans la boîte de blocs logiques avant de se rendre à l'évidence et d'admettre que cette plage devait obligatoirement rester vide.

Une solution partielle du problème pourrait être trouvée dans l'accent que le nouvel enseignement met sur la notion de classification multiplicative. En effet, "les seuls cas où un apprentissage expérimental a pu entraîner une solution correcte à la comparaison quantitative de classes en inclusion, sont ceux dans lesquels on a exercé la compréhension de la multiplication logique." (60)

Il n'y a donc pas lieu de prévoir un apprentissage de la notion d'inclusion pour elle-même, mais cet apprentissage devrait se nourrir

de l'intense activité de classement demandée aux enfants et de l'exploitation systématique de ces activités pour la mise en évidence du cas particulier de l'inclusion des classes. En contrepartie, et nous aurons l'occasion d'y revenir plus tard, il paraît ridicule de vouloir, comme l'ont prétendu certaines écoles, introduire la soustraction dès l'âge de six ans, confondant ainsi le véritable apprentissage avec ce qui ne peut être qu'un simple dressage.

14.5 L'intersection et la réunion

En tant qu'opération logique, l'idée d'intersection découle naturellement de la notion de classification multiplicative. La transposition sur le terrain mathématique pose principalement des problèmes de langage. Par exemple, un enfant très jeune saura spontanément reconnaître un carré bleu dans un ensemble de pièces. La difficulté sera un peu plus grande lorsqu'on fera apparaître la négation d'une propriété. Par exemple "carré et non bleu". Mais il y a une très grande distance entre la définition précédente et la phase vers laquelle on tendra à la fin de la scolarité obligatoire soit :

A = ensemble des objets carrés

B = ensemble des objets non-bleu

$$x \in A \cap B$$

C'est-à-dire, x appartient à l'intersection des ensembles A et B ; x jouit donc de la propriété commune aux éléments appartenant à l'ensemble A et de la propriété commune aux éléments appartenant à l'ensemble B.

Cette difficulté de formulation incitera le maître à une grande prudence quant à l'introduction des symboles de l'algèbre des ensembles à l'école primaire.

A notre sens, la notion d'intersection, comme celle de réunion, doit faire partie du vécu de l'enfant. Celui-ci doit pouvoir la reconnaître intuitivement, décrire les situations correspondantes au moyen de son langage quotidien, découvrir la présence de cette opération dans diverses activités mathématiques, avant d'être amené à l'analyse abstraite et au codage par les symboles usuels.

Il en va de même pour l'idée de réunion à laquelle s'ajoute une difficulté supplémentaire au niveau de l'emploi du "ou" inclusif dont la

signification est fort différente de celle qu'attribue au mot "ou" le langage populaire.

Les premières activités relatives aux opérations sur les ensembles sont fort bien décrites dans de nombreux ouvrages destinés aux élèves de 6 à 8 ans. Entre 8 et 11 ans, les enfants emploieront ces opérations dans l'apprentissage des autres notions mathématiques. Nous aurons l'occasion d'en voir quelques exemples plus loin. C'est seulement à partir de 11-12 ans que l'enfant sera apte à travailler avec profit les propriétés de l'intersection et de la réunion en les détaillant du contenu des ensembles sous-jacents.

Un examen superficiel des manuels pourrait laisser croire que les exercices sur les ensembles sont les mêmes du début à la fin de la scolarité primaire. En réalité, si les notions fondamentales d'intersection et de réunion sont déjà présentes dans les jeux les plus élémentaires, quatre facteurs concourent à la diversification et à l'enrichissement des situations : le nombre des critères de classement entrant en jeu, le degré de complexité dans l'analyse du problème (emploi de la négation, recherche des ensembles complémentaires ou des ensembles-différence, règles de Morgan etc.), le matériel sur lequel s'exerce la réflexion, le niveau requis dans la description verbale et la représentation symbolique des situations en jeux.

14.6 L'implication

Il n'est pas question, à l'école primaire, d'envisager une étude approfondie de l'implication logique. En particulier, le fait qu'une proposition fausse implique n'importe quelle proposition est très difficilement accessible, même pour des adultes. En revanche, une activité portant sur ce que l'on pourrait appeler, comme le fait Matalon, "l'implication naturelle" peut constituer un développement intéressant de la disjonction. Dans sa recherche, B. Matalon (61) présente au sujet un "village" constitué par une grande place circulaire entourée de 5 maisons, une poste, une église et une école. La situation est présentée de telle manière que soit réalisée l'implication "si le bonhomme est allé à la poste, alors il a passé devant la maison". Les résultats obtenus montrent que, vers l'âge de 9-10 ans, les enfants devraient tirer profit d'une première approche de l'implication. Ce point de vue semble partagé par Dienes qui suggère d'aborder l'implication à partir des blocs logiques (62). Bien que ce dernier ne fasse presque jamais mention d'un âge déterminé dans la présentation de ses jeux mathématiques, les films illustrant ses exposés présentent en général des enfants de 8 à 10 ans.

Après avoir proposé aux enfants la construction de la réunion de deux ensembles, Dienes leur demande de construire un ensemble correspondant à une implication et non à une disjonction. Les élèves devront, par exemple, chercher tous les éléments pouvant appartenir à un ensemble défini par "tous les éléments bleus sont ronds", ce qui correspond à reconnaître la valeur de vérité de la proposition "si bleu alors rond". L'enfant sera ensuite conduit à la découverte de la contrapositive de cette proposition qui s'énonce "si non rond alors non bleu". La mise en relation de l'implication et de la disjonction permettra de reconnaître que les propositions "a) si bleu, alors rond ; b) si non-rond alors non-bleu ; c) rond ou non bleu " sont trois définitions du même ensemble.

Nous ne pouvons que recommander l'introduction, à partir de la quatrième année, de ce type d'activité qui renouvelle et développe utilement les notions de réunion et d'intersection abordées dans les degrés qui précèdent. En cinquième et en sixième années, il sera possible de travailler, dans le même esprit, des implications liées à des éléments moins concrets. Sans entrer dans le détail, nous nous bornerons à en citer quelques-unes :

- si carré, alors rectangle ;
- si multiple de 8, alors multiple de 4 ;
- si rectangle et si losange, alors carré ;
- si multiple de 3 et si multiple de 2, alors multiple de 6.
- si diviseur de 200 et si diviseur de 250, alors diviseur de 50.

C'est à Dienes lui-même que nous emprunterons quelques conseils relatifs à ce genre d'activité :

"Il est extrêmement important, pour tous les travaux précédents, de ne pas se limiter à la seule utilisation des blocs logiques. Pour faire leurs expériences, les enfants devront utiliser d'autres situations...

... En dernière analyse, ce ne sont pas les situations que les enfants doivent garder en tête... mais au contraire, ce sont les relations entre attributs qu'il faut dégager et comprendre comment de telles relations permettent de construire d'autres attributs (implication, conjonction et disjonction d'attributs) et déduction sur ces attributs.

Le maître pourra utiliser les nombres, s'il manque d'attributs. Il pourra aussi peindre en différentes couleurs des cubes, cylindres et sphères en bois. Il existe dans le commerce de petits objets de formes et couleurs différentes. S'il n'y a pas assez

d'attributs, il est toujours possible d'utiliser ces objets en prenant pour variable les nombres, en considérant des sous-ensembles à un, deux, trois ou quatre éléments. Inutile de dire que nous n'envisagerons pas une telle éventualité avec de jeunes enfants, car l'étude des ensembles, des attributs et de la logique a justement pour but à leur niveau le fondement des nombres. Mais au niveau où nous nous plaçons, nous supposons que la notion d'entiers naturels est bien connue, il est alors possible de prendre pour attributs des nombres". (63)

14.7 Exemples d'activités sur la notion d'ensemble

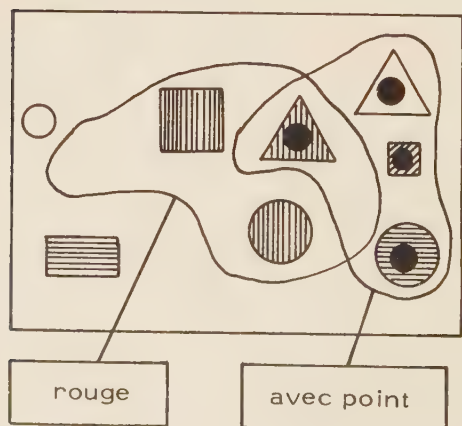
Partons d'un matériel que nous supposerons non connu des élèves et qui se présente de la manière suivante :



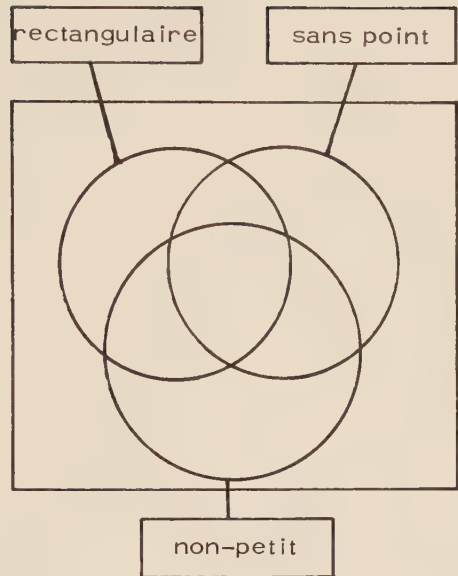
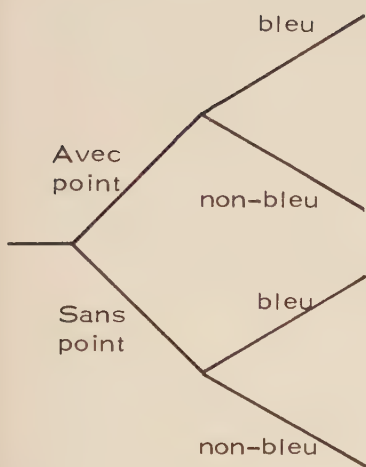
a) Observation du matériel. Classement spontané.

Les élèves, travaillant par groupes, cherchent à énumérer les attributs des différentes pièces. Ils construisent divers classements et les représentent au moyen de diagrammes variés.

Exemples :



	grand	non-grand
carré		
non-carré		



Remarquons que le maître peut, soit donner des diagrammes pré-imprimés dans lesquels les élèves effectueront leurs classements, soit les laisser construire le diagramme. Sans rejeter la première possibilité, notre préférence va nettement vers la seconde, car il nous paraît important que l'enfant sache créer son modèle de classement en fonction de la situation particulière à laquelle il est confronté.

b) **Activité combinatoire.** Recherche de l'ensemble exhaustif des éléments réalisables.

Les exercices précédents ont permis aux élèves de dresser la liste des attributs observés et de les classer par catégories :

- Forme : carré, rond, triangulaire, rectangulaire.
- Couleur : rouge, bleu, vert, blanc.
- Dimension : grand, moyen, petit.
- Surcharge : avec point, sans point.

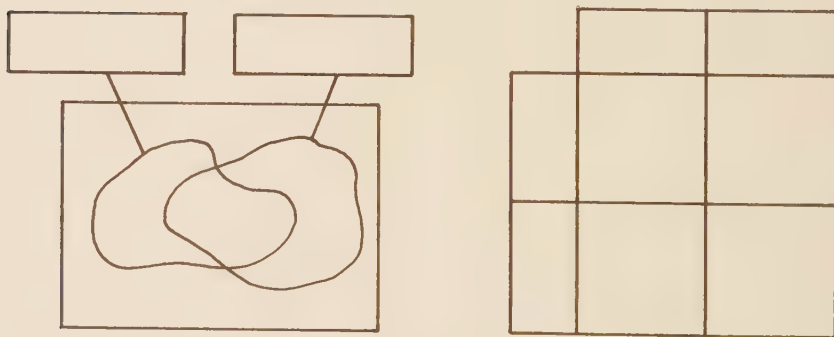
On peut donc créer 96 pièces différentes ($4 \times 4 \times 3 \times 2$). Cette construction, avec les 24 arbres de classement différents qui peuvent la représenter, constitue une activité propre à une prise de cons-

cience réelle de ce qu'est une classification multiplicative. Le maître pourra demander à chaque groupe d'élèves, sur une feuille de grand format, de représenter l'un des arbres de classement. A partir de là, la recherche portera sur la modification du nombre total des éléments en fonction de l'adjonction ou de la suppression d'un attribut :

- une forme de moins ; 24 figures de moins ;
- une couleur de plus ; 24 figures de plus ;
- une dimension de plus ; 32 figures de plus ;
- une surcharge de plus ; 48 figures de plus ;
- etc...

c) Classement des éléments en fonction des critères donnés.

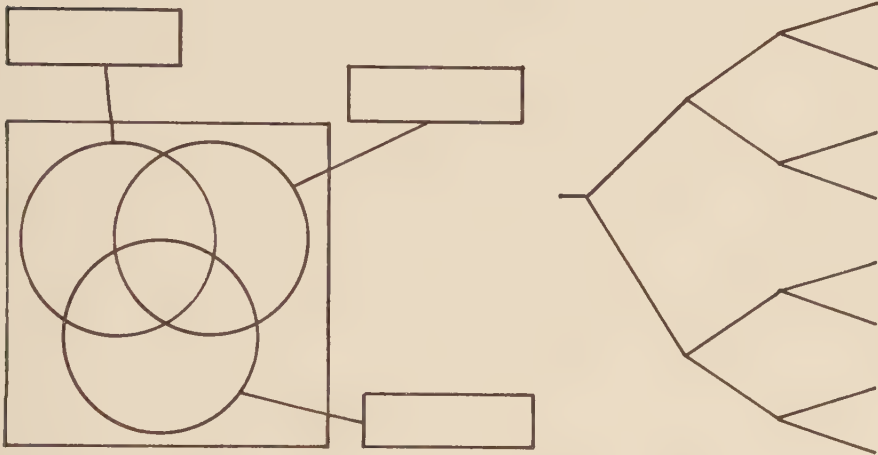
Lorsque le matériel est connu, de nombreux exercices de classement peuvent intervenir. La complexité des "étiquettes" désignant les plages d'un diagramme sera de plus en plus grande. On tentera, au moyen de ces exercices, de faire découvrir à l'enfant tous les cas correspondant à un certain type de classement. Prenons un exemple qui, à première vue paraît très simple :



Quelles sont, au moyen de l'un ou de l'autre de ces deux diagrammes, les possibilités d'effectuer un classement du matériel décrit ci-dessus lorsqu'on envisage uniquement l'affirmation et que l'on n'accepte pas que l'intersection soit vide ?

- Carré -rouge ; Rond-rouge ; Triangulaire-rouge ; etc..

(Il y a en fait 62 cas possibles; il ne sera donc pas utile d'exiger des élèves, hormis dans des cas particuliers, l'énumération de tous).



Dans les mêmes conditions, combien peut-on effectuer de classements différents au moyen d'un diagramme utilisant trois critères ?

- carré - rouge - grand ; carré - rouge - moyen ; etc..

(On atteint cette fois 128 cas possibles ; seuls les élèves les plus doués pourront trouver une méthode permettant leur énumération exhaustive).

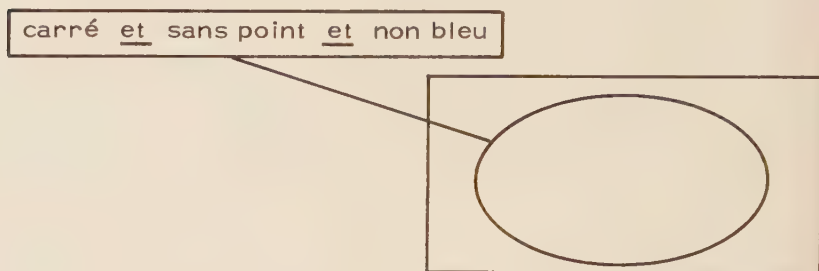
La question pourra ensuite se poser de savoir si le remplacement de tous les attributs positifs par des attributs négatifs (non-carré ; non-rouge ; etc..) modifie le nombre des possibilités. De même, que se passera-t-il si l'on accepte aussi bien l'attribut négatif que l'attribut positif ?

Comme on peut le constater, ce type d'activité, qui exige la maîtrise intuitive de l'idée de combinatoire, ne peut être présentée à des élèves trop jeunes.

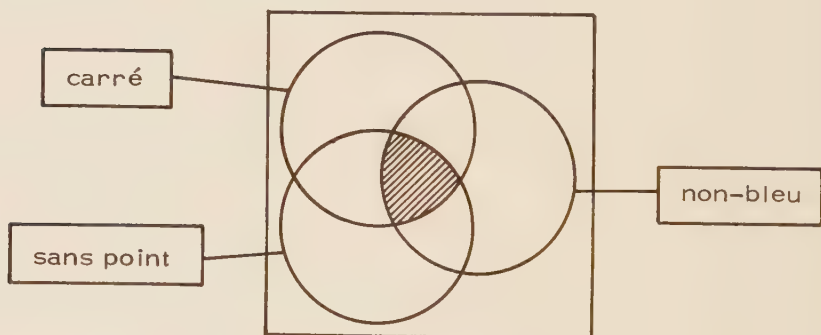
d) Intersection.

Les élèves seront amenés à la constitution d'ensembles répondant à deux ou plusieurs attributs positifs ou négatifs.

Par exemple :



La vérification sera obtenue par la construction du diagramme ci-dessous :



On touche ici une notion très importante qui semble parfois quelque peu négligée. En effet, dans la plupart des manuels figure la seconde des deux représentations ci-dessus. En revanche, on ne rencontre presque jamais la première. Or, il est nécessaire que l'enfant comprenne clairement qu'un ensemble peut être défini par la conjonction de plusieurs propriétés et que notre attention se fixe, pour un moment, exclusivement sur les éléments jouissant de l'ensemble de ces propriétés. Prenons un exemple banal : lorsque nous travaillerons la table de Pythagore et que nous demanderons à l'élève de chercher les multiples de 5 et de 7 plus grand que 20 et plus petits que 100, il ne sera pas toujours utile de représenter séparément chacun des attributs choisis.

D'autre part, une telle représentation sera de nature à préparer la notion d'opération sur un ensemble de parties. Reprenons le même exemple : l'ensemble N des nombres naturels peut être décomposé en un certain nombre de parties.

P_1 = Ensemble des nombres plus grands que 20.

P_2 = Ensemble des nombres plus petits que 100.

P_3 = Ensemble des multiples de 5.

P_4 = Ensemble des multiples de 7.

En appliquant l'opération intersection sur cet ensemble de parties, nous déterminerons de nouvelles parties.

$$P_1 \times P_2 \Rightarrow P_5$$

P_5 = ensemble des nombres à la fois plus grands que 20 et plus petits que 100.

$$P_3 \times P_4 \Rightarrow P_6$$

P_6 = ensemble des nombres qui sont à la fois multiples de 5 et de 7.

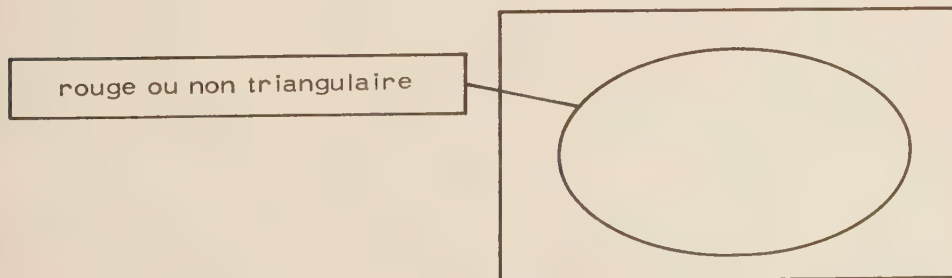
$$P_5 \times P_6 \Rightarrow P_7$$

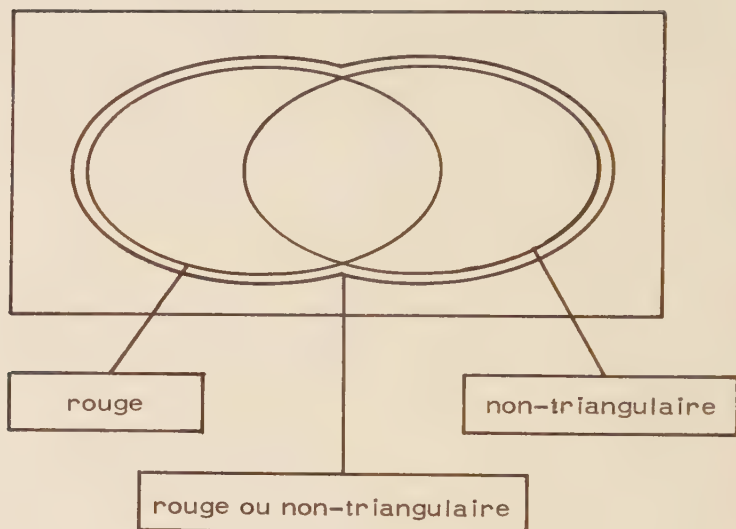
P_7 = ensemble des nombres plus petits que 20, plus grands que 100, multiples de 5 et multiples de 7.

Il sera souvent, utile, dans le cadre des exercices de calcul numérique, de définir de cette manière l'ensemble des nombres sur lesquels on choisit de travailler.

e) Réunion.

De la même manière, la notion de réunion, abordée préalablement dans des cas simples, sera reprise avec un niveau de difficulté plus élevé.





f) Complémentaire et règles de Morgan.

Les exercices précédents relatifs aux notions d'intersection et de réunion seront complétés par une recherche de la définition du sous-ensemble formant le complémentaire d'un ensemble donné.

Ainsi, comment définir le complémentaire de l'ensemble répondant aux attributs "carré et sans point et non-bleu" ?

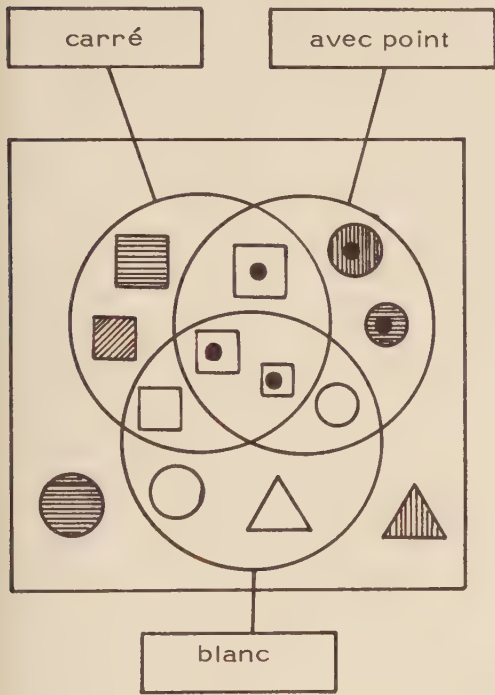
On vérifiera aisément que la définition du complémentaire s'énoncera : "non-carré ou avec point ou bleu".

Le complémentaire de "rouge ou non-triangle" sera "non-rouge et triangle".

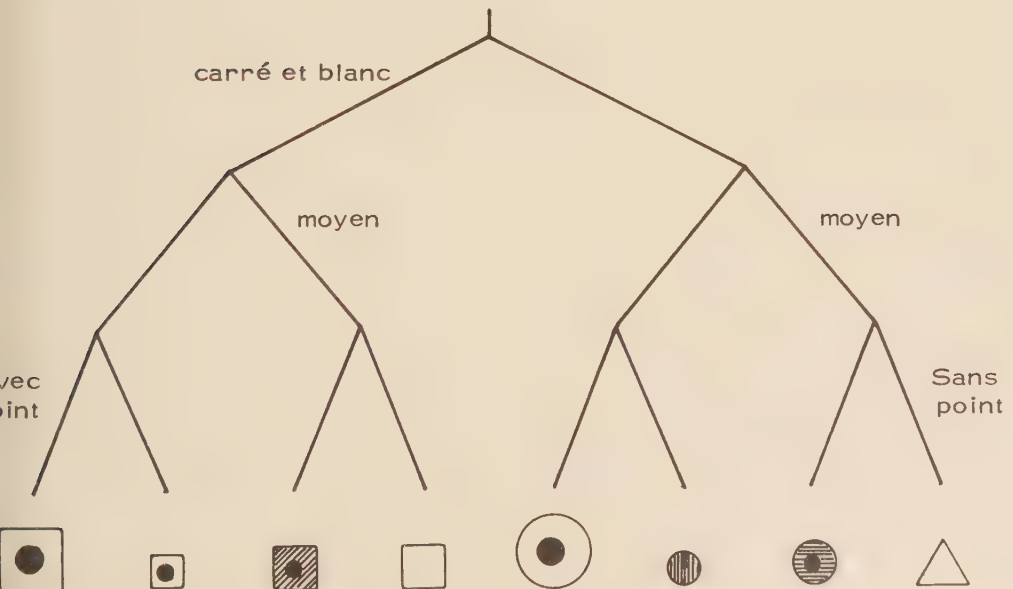
g) Recherche d'erreurs de classement.

L'acquisition d'une méthode de travail rigoureuse sera favorisée par des exercices dans lesquels l'enfant doit passer en revue de manière systématique chacun des éléments figurant dans un diagramme afin de déceler les erreurs de classement éventuelles.

Exemple : découvrir les erreurs dans les diagrammes ci-dessous :



	carré ou bleu	non-carré et non-bleu
grand		
non-grand		

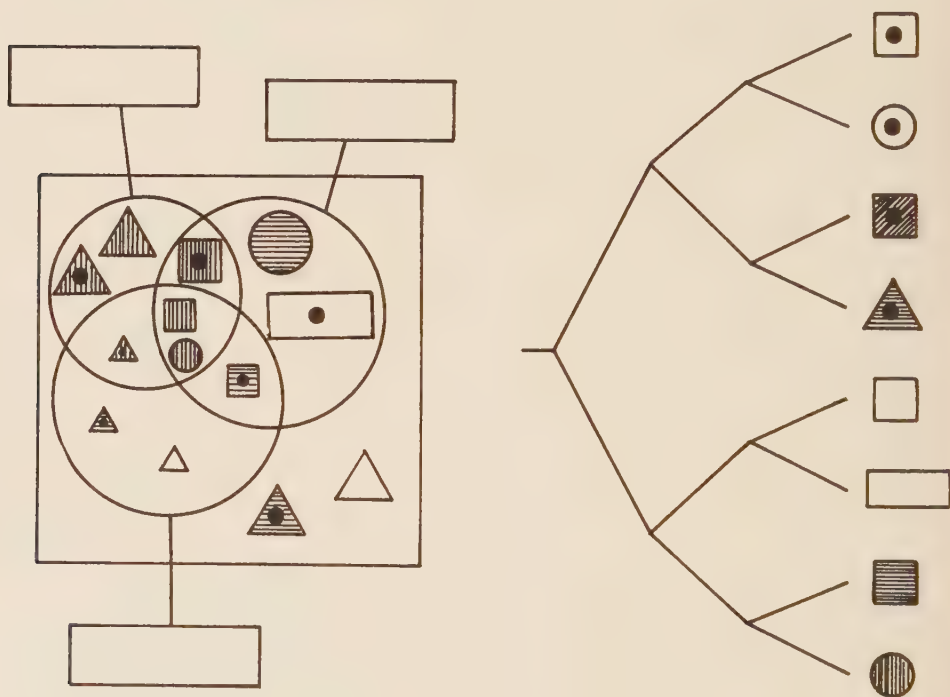


h) Recherche des attributs intervenant dans un classement.

L'analyse d'un diagramme dans le but de découvrir les critères ayant présidé au classement constitue probablement l'une des activités les plus difficiles. Dans les cas les plus simples, l'enfant saura construire sa propre méthode de recherche.

Exemples :

Trouver les "étiquettes" correspondant à ces diagrammes.

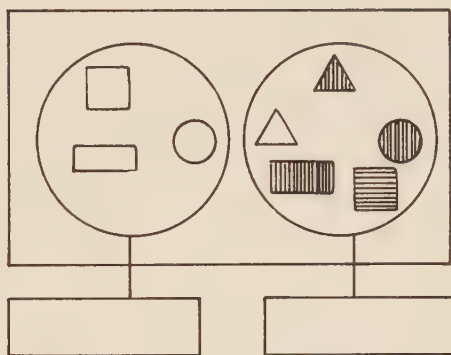
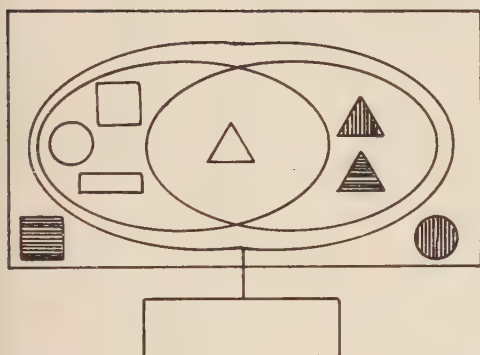


Le problème deviendra nettement plus difficile lorsque les "étiquettes" comporteront elles-mêmes la conjonction de deux attributs. Il sera alors préférable de donner à l'enfant une collection d'"étiquettes" parmi lesquelles il devra faire son choix.

Exemple :

Choisir parmi les étiquettes ci-dessous, celles qui conviennent pour compléter les diagrammes.

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| - blanc ou triangle | - blanc et non-triangle |
| - blanc et triangle | - non-blanc ou triangle |
| - blanc ou non-triangle | - non-blanc et triangle |



Ce genre d'activité pourrait sembler quelque peu gratuit. En réalité, il constitue une préparation très utile à la lecture et à l'analyse d'un énoncé mathématique exprimé de manière formalisée.

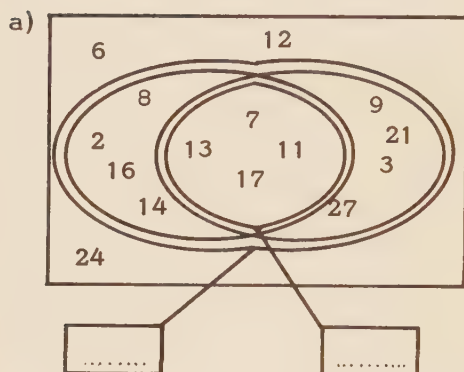
Il offre aussi d'intéressantes perspectives dans le domaine numérique.

Exemple :

Voici une série d'étiquettes :

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| 1. Impair et multiple de 3 | 4. Pair ou multiple de 3 |
| 2. Impair ou multiple de 3 | 5. Impair et non-multiple de 3 |
| 3. Pair et multiple de 3 | 6. Impair ou non-multiple de 3 |

Dans chaque diagramme, indique sur le pointillé le numéro de l'étiquette qui convient :



b)

		
plus petit que 20	11 5 13 17 1 7 19	6 3 9 8 14 18
plus grand que 20	25 29 31 23 35	27 26 21 24 30

On reconnaîtra aisément tout l'intérêt que présente cet exercice en raison de l'analyse méthodique qu'il exige. Il constitue également une préparation à l'utilisation des quantificateurs. Il suffit, en effet, de trouver un seul élément ne convenant pas pour rejeter une "étiquette". En revanche, il faut que tous les éléments de l'ensemble choisi correspondent au critère pour que la même "étiquette" puisse être utilisée.

- i) Ecriture ensembliste et approche des propriétés de l'intersection et de la réunion.

En dernière étape, on pourra faire apparaître les symboles de l'intersection et de la réunion, ce qui permettra de reprendre, sous une forme plus abstraite, les notions de commutativité et d'associativité attachées à ces opérations.

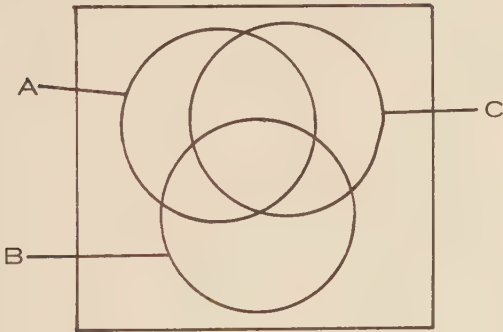
Exemple : A = Ensemble des figures rectangulaires.
 B = Ensemble des figures avec point.
 C = Ensemble des figures rouges.



Enumérer les éléments :

$$A = \{ \quad \quad \quad \} \quad B = \{ \quad \quad \quad \} \quad C = \{ \quad \quad \quad \}$$

Placer les lettres dans un diagramme.



Enumérer les éléments de :

$$\begin{array}{ll} B \cap C & = \{ \quad \quad \quad \} \\ C \cap B & = \{ \quad \quad \quad \} \\ C \cap A & = \{ \quad \quad \quad \} \end{array} \quad \begin{array}{ll} A \cup B & = \{ \quad \quad \quad \} \\ B \cup A & = \{ \quad \quad \quad \} \\ B \cup C & = \{ \quad \quad \quad \} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (B \cap C) \cap A & = \{ \quad \quad \quad \} \\ B \cap (C \cap A) & = \{ \quad \quad \quad \} \end{array} \quad \begin{array}{ll} (A \cup B) \cup C & = \{ \quad \quad \quad \} \\ A \cup (B \cup C) & = \{ \quad \quad \quad \} \end{array}$$

14.8 Autres matériels

Le matériel décrit plus haut présente des attributs relativement simples. Il est facile à réaliser par les élèves eux-mêmes. Dans tous les manuels, on trouve de nombreuses idées du même genre.

A partir de 8 à 9 ans, il pourra être fait appel à d'autres matériels qui présentent une plus grande difficulté d'analyse. C'est le cas, par exemple, pour des matériels dont les attributs s'accompagnent d'une notion de position.

En voici quelques exemples :

a)



Attributs : - lignes verticales ou horizontales ;
- figures rondes, carrées ou triangulaires ;
- figures rouges, bleues ou blanches ;
- figures placées à gauche, au milieu ou à droite ;
au total, $2 \times 3 \times 3 \times 3$ soit 54 figures.

b)



Attributs : - figure de gauche ronde, carrée, triangulaire
figure de gauche blanche, rouge, bleue
- figure du milieu ronde, carrée, triangulaire
- figure du milieu blanche, rouge, bleue
- figure de droite ronde, carrée, triangulaire
- figure de droite blanche, rouge, bleue
au total, $9 \times 9 \times 9$ soit 729 figures.

Un cas plus simple consisterait à dessiner toutes les figures d'un élément de la même couleur, ce qui donnerait :

Attributs : couleur : rouge, bleu, blanc
 figure de gauche : ronde, carrée, triangulaire
 figure du milieu : ronde, carrée, triangulaire
 figure de droite : ronde, carrée, triangulaire
 au total, $3 \times 3 \times 3 \times 3$ soit 81 éléments

c)

a	a	b	c	e	b	c	e
a	a	a	d	c	a	e	c

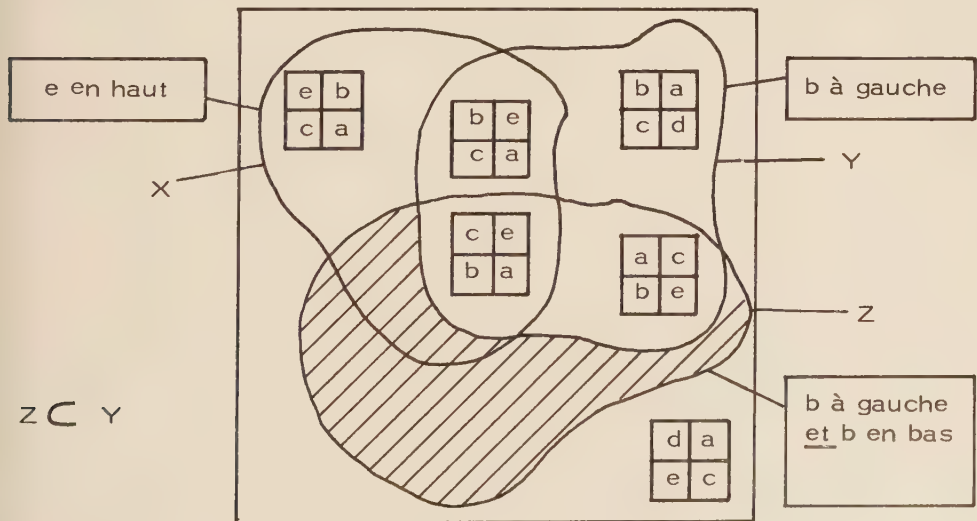
Attributs :

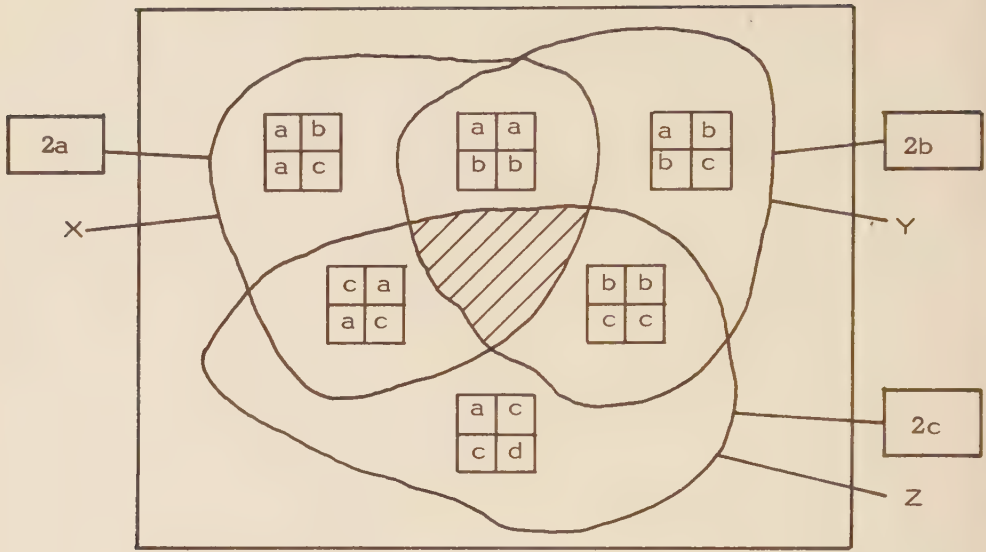
en haut $\begin{cases} \text{à gauche} & a, b, c, d \text{ ou } e \\ \text{à droite} & a, b, c, d \text{ ou } e \end{cases}$

en bas $\begin{cases} \text{à gauche} & a, b, c, d \text{ ou } e \\ \text{à droite} & a, b, c, d \text{ ou } e \end{cases}$

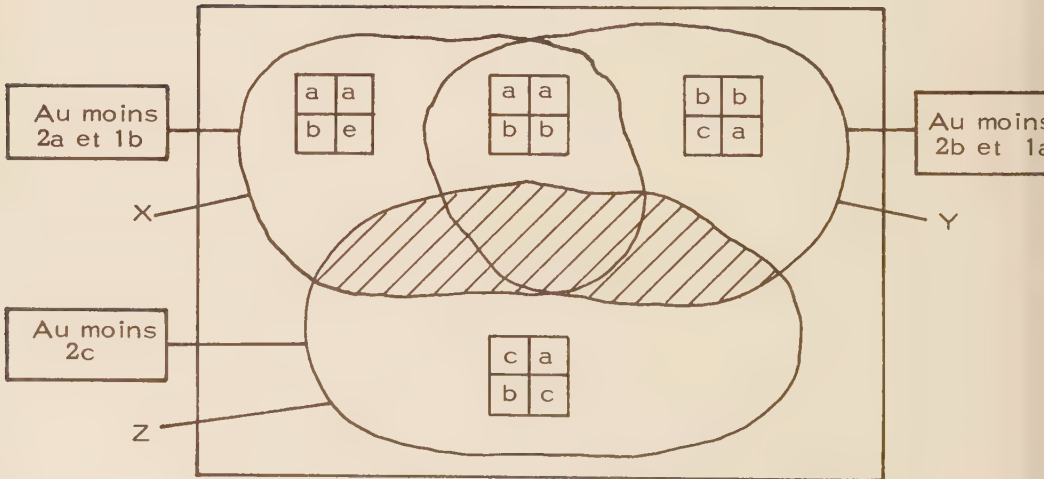
au total, $5 \times 5 \times 5 \times 5$ soit 625 éléments

Exemples de classement :





$$X \cap Y \cap Z = \emptyset$$



$$X \cap Z = \emptyset$$

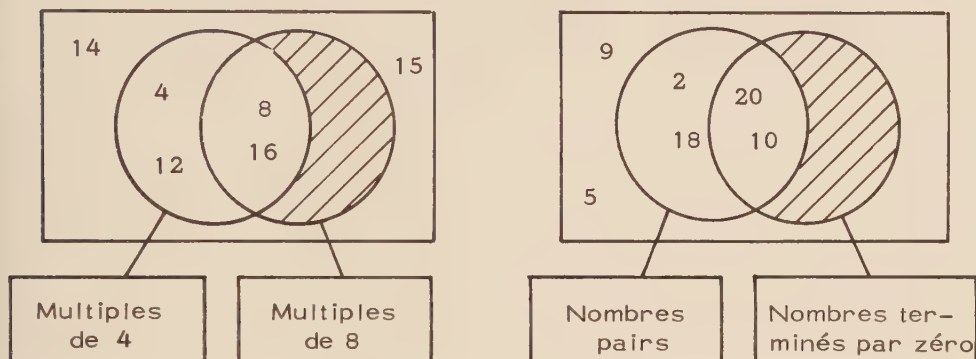
$$Y \cap Z = \emptyset$$

$$X \cap Y \cap Z = \emptyset$$

14.9 Ensembles basés sur des données numériques

De nombreux exercices de classement de nombres peuvent être effectués. Nous n'en citerons que quelques-uns.

a) Notion d'inclusion.



b) Partition.

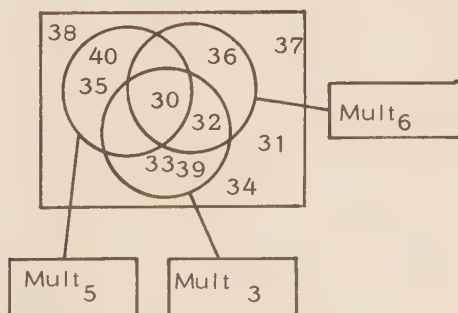
Classer les nombres 5, 8, 12, 17, 23, 34, 41 en classes de restes modulo cinq.

0	1	2	3	4
5	41	12	8	34
		17	23	

c) Découverte d'erreurs de classement.

Dans les diagrammes ci-dessous, biffer les nombres mal placés.

	Mult 4	Non mult 4
Mult ₅ <u>ou</u>	20 24 25	22 26 28 30
Non mult ₅ <u>et</u> non mult ₂	29	21 23 27



15. LES RELATIONS

15.1 La notion de relation et ses représentations

L'approche intuitive de l'idée de relation donne lieu à de nombreuses activités dès le début de la scolarité. En revanche, la possession complète des notions de relations ne peut intervenir avant que l'enfant ait atteint le stade des opérations formelles. Nous nous attachons donc à décrire un certain nombre d'activités qui paraissent utiles pour des enfants de 8 à 11-12 ans.

Nous retiendrons tout d'abord quatre manières de représenter une relation. Soit une situation dans laquelle :

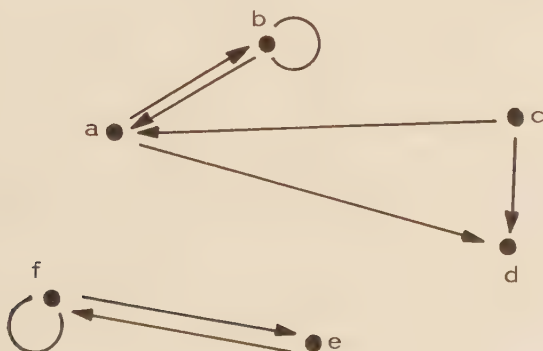
- a est en relation avec b et avec d ;
- b est en relation avec lui-même et avec a ;
- c est en relation avec a et avec d ;
- e est en relation avec f ;
- f est en relation avec lui-même et avec e ;

La représentation peut être fournie par :

a) un ensemble de couples

a ; b	c ; d
a ; d	e ; f
b ; b	f ; f
b ; a	f ; e
c ; a	

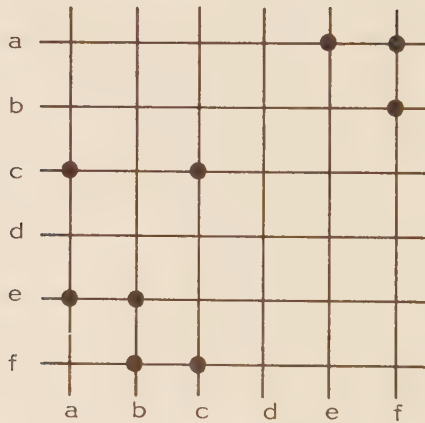
b) un diagramme sagittal



c) Un tableau à double entrée.

	a	b	c	d	e	f
a		●	●			
b	●	●				
c						
d	●		●			
e						●
f					●	●

d) Un système de coordonnées.

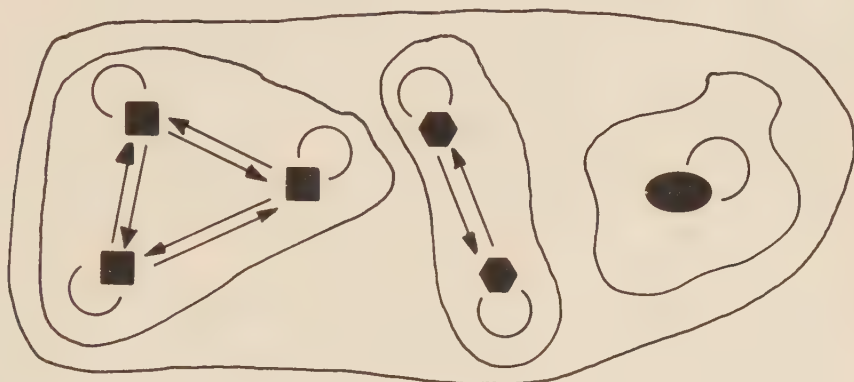


En deuxième et en troisième années, ce sont principalement les deux premiers types de codage qui interviendront, le tableau à double entrée étant plutôt employé pour représenter la relation entre deux ensembles différents que la relation dans un même ensemble. L'utilisation du système de coordonnées demande une préparation qui ne lui permet guère d'être utilisable avant la quatrième ou même la cinquième année (cette préparation sera abordée dans le chapitre consacré à l'exploration de l'espace).

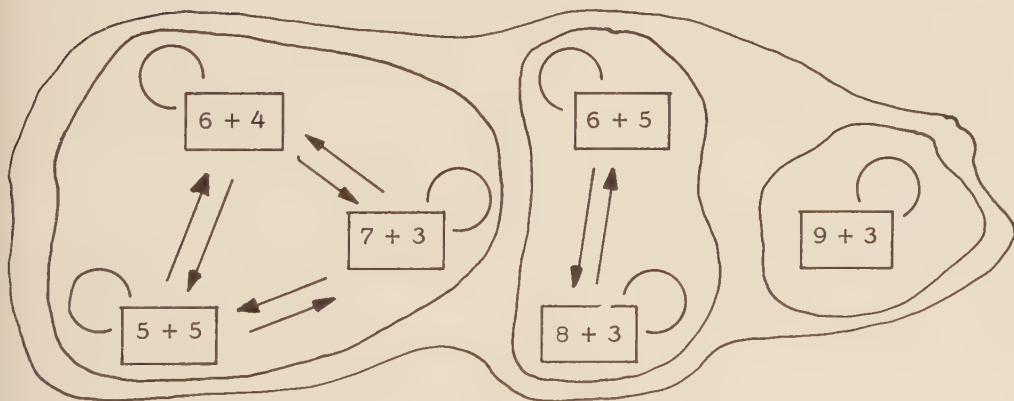
15.2 La relation d'équivalence et la relation d'ordre

La compréhension intuitive de la notion d'équivalence ne présente guère de difficulté pour l'enfant qui la lie tout naturellement à ses premières activités sur les ensembles. La relation d'équivalence détermine une partition dans un ensemble.

Exemples : "... a la même figure que..."



"... représente le même nombre que..."



Il en va tout autrement de la compréhension profonde des propriétés de la relation d'équivalence qui doivent être observées dans des situations variées avant d'être envisagées sur un plan abstrait.

Si la notion de symétrie est assez facile à saisir, la réflexivité apparaît souvent à l'enfant comme quelque chose d'inutile (je suis de la même couleur que moi-même) ou bien l'enfant aura tendance à dessiner des boucles dans tous les cas. Il conviendra donc de présenter

aux élèves des situations très variées qui sollicitent constamment la réflexion. En voici quelques exemples :

- ... a la même couleur que ...
- ... a le même nombre de pétales que ...
- ... comprend le même nombre de lettres que ...
- ... à la même forme et la même couleur que ...
- ... à la même forme ou la même couleur que ...
- ... est un multiple du même nombre que ...
- ... etc..

Des contre-exemples pourront être trouvés dans la négation de l'équivalence :

- ... n'a pas la même forme que ...
- ... ne représente pas le même nombre que ...
- ... etc..

La transitivité de la relation d'équivalence se situe à un niveau plus élevé. Il s'agit de comprendre que "si a est équivalent à b et b est équivalent à c, alors a est équivalent à c".

Il arrive souvent que le maître croie voir chez l'enfant une compréhension intuitive de la transitivité alors qu'en réalité, il n'existe qu'une succession de comparaison deux à deux.

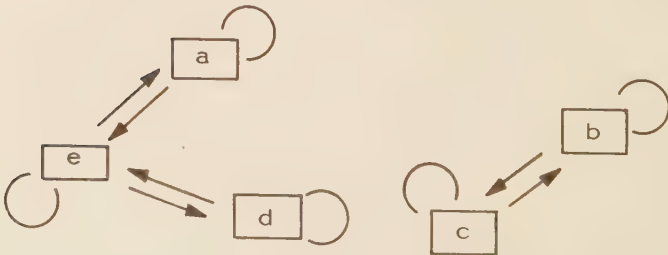
Il faut donc trouver des exercices dans lesquels l'enfant soit amené à une véritable déduction.

Exemple : a, b, c, d, e sont des objets.

On a représenté par quelques flèches la relation :

"... a le même poids que ..."

Peut-on tracer d'autres flèches sans peser les objets ?



C'est donc par déduction que la double flèche entre a et d sera tracée.

La relation d'ordre est également plus difficile qu'il n'y paraît au premier abord puisqu'elle est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive. A l'école primaire, on abordera en premier lieu la relation d'ordre strict (qui n'est pas à proprement parler une relation d'ordre) avec des exercices du type :

" ... est plus grand que ... "

" ... est plus jeune que ... "

" ... contient plus d'éléments que ... "

" ... a plus de pétales et plus de feuilles que ... "

" ... a plus de pétales ou plus de feuilles que ... "

C'est en cinquième année seulement que pourront être abordées des situations du type :

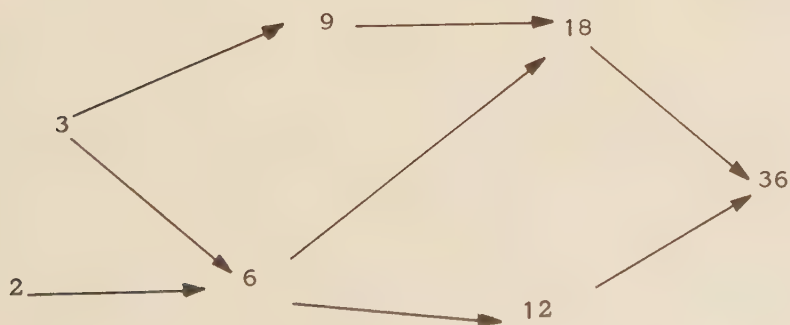
" ... est plus grand ou égal à ... "

" ... n'est pas plus petit que ... "

" ... ne contient pas moins d'éléments que ... "

Enfin certaines notions permettront de faire apparaître des relations d'ordre partiel. Ce sera le cas, par exemple, de la divisibilité :

" ... est diviseur de ... "



15.3 Le produit cartésien

Avec le produit cartésien, nous retrouvons une notion déjà abordée dans le chapitre consacré aux ensembles, celle de combinatoire.

Etant donné deux ensembles et une relation, il est possible de former tous les couples associant un élément du premier ensemble à un élément du second ensemble.

Exemple :

$$A = \{ a, b, c, d \}$$

$$B = \{ 10, 11, 12 \}$$

L'ensemble-produit C sera formé de la manière suivante :

$$C = \{ a, 10; a, 11; a, 12; b, 10; b, 11; b, 12; c, 10; c, 11; c, 12 \}$$

La représentation dans un tableau sera plus claire :

	a	b	c	d
10	a10	b10	c10	d10
11	a11	b11	c11	d11
12	a12	b12	d12	c12

Il faut noter que, si théoriquement le produit cartésien peut toujours être réalisé, il y a de nombreux cas où une relation n'a de sens que dans un sous-ensemble de ce produit.

Exemple : "... utilise ..."

	le maçon	le cuisinier	le paysan	le chirurgien
un marteau	X			X
une truelle	X	X		
un scalpel				X
une charrue			X	

Il est donc évident, mais l'enfant n'en aura pas la conscience immédiate, que l'absence d'une croix dans le tableau ci-dessus apporte autant d'information que la présence d'une croix. On constate que le maçon utilise une truelle comme on remarque que le cuisinier n'utilise pas de marteau.

15.4 Exemples d'activités sur la notion de relation

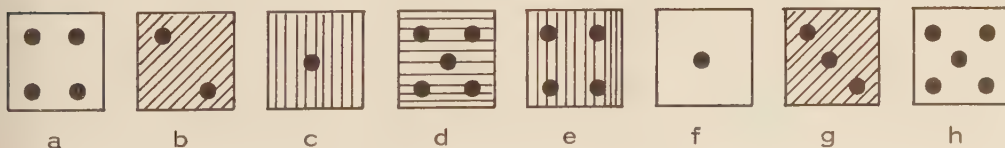
Les jeux et les exercices portant sur les relations comportent plusieurs aspects :

- Déterminer si le couple correspond ou non à la relation.
- Représenter l'ensemble des couples correspondant à une relation.
- Extraire l'information fournie par la représentation d'une relation.
- Découvrir la signification d'une relation à partir de couples déjà formés.
- Travailler la transitivité.

Une seconde dimension sera constituée par le contenu de l'ensemble dans lequel doit être établie la relation. La relation d'équivalence de forme entre des objets concrets est évidemment plus facile qu'une relation du même type sur des données numériques qui, dans les cas les plus simples, présentent elles-mêmes moins de difficulté que des relations de voisinage ou de parenté.

Le lecteur trouvera, au chapitre 13 (13.6 à 13.9), une collection de questions recouvrant les différents degrés de la scolarité primaire. Nous nous bornerons donc à quelques adjonctions.

Prenons, par exemple, une collection de 8 dés à jouer de différentes couleurs et lançons-les sur la table.



Ce simple matériel va nous donner l'occasion d'une multitude d'exercices.

a) Représentation graphique d'une relation d'équivalence.

- ... est de la même couleur que ...
- ... comporte le même nombre de points que...
- ... est de la même couleur et comporte le même nombre de points que ...
- ... est de la même couleur ou comporte le même nombre de points que ...
- ... etc..

b) Négation de l'équivalence.

- ... n'est pas de la même couleur que...
- ... n'est pas de la même couleur et ne compte pas le même nombre de points que...
- ... n'est pas de la même couleur mais comporte le même nombre de points que ...
- ... etc..

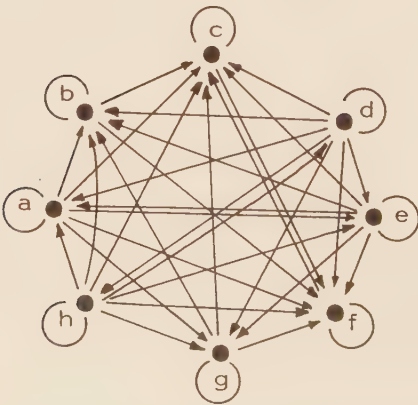
c) Relation d'ordre strict.

- ... comporte plus de points que ...
- ... comporte moins de points que ...

d) Relation d'ordre large.

- ... ne comporte pas plus (ou pas moins) de points que ...

Exemple : ... ne comporte pas moins de points que ...



	a	b	c	d	e	f	g	h
a	X			X	X			X
b	X	X		X	X		X	X
c	X	X	X	X	X	X	X	X
d				X				X
e	X			X	X			X
f	X	X	X	X	X	X	X	X
g	X			X	X		X	X
h				X				X

(On remarquera ici l'avantage du diagramme cartésien sur le diagramme sagittal du point de vue de la lisibilité).

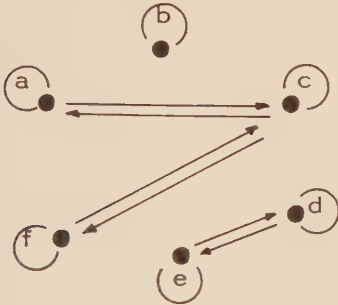
e) Relation de voisinage.

... est placé à côté de ...

... est placé avant ... (si la série est orientée par exemple de gauche à droite).

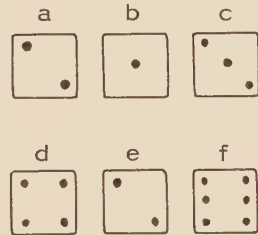
f) Extraction des informations à partir d'un diagramme.

Le diagramme représente la relation:
" ... est de la même couleur que ... "

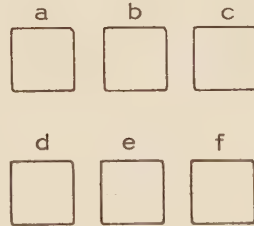


" ... ne comporte pas le même nombre de points que ... "

Colorie les dés.



Dessine les points.

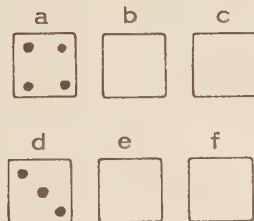


	a	b	c	d	e	f
a		●		●	●	●
b	●		●	●		●
c		●		●	●	●
d	●	●	●		●	●
e	●		●	●		●
f	●	●	●	●	●	

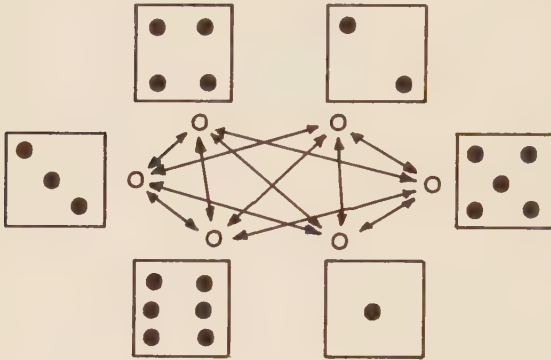
" ... comporte deux points de plus que ... "

Complète les dés.

	a	b	c	d	e	f
a			x			
b						
c						
d		x				
e	x					
f				x		



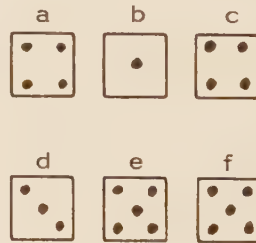
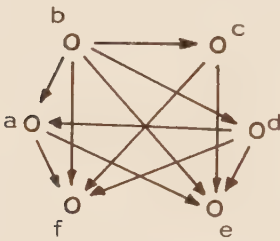
" ... touche (est contigu) à ... "



Construis en carton le dé correspondant à ce diagramme

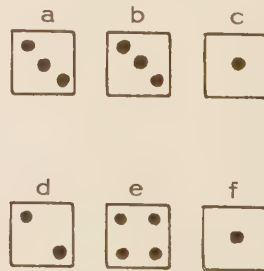
g) Découverte de la signification d'une relation.

Que signifie la flèche ?



Quelle relation est représentée dans ce diagramme ?

	a	b	c	d	e	f
a	X		X			X
b	X	X	X			X
c			X	X		X
d			X	X		X
e	X	X	X		X	X
f			X	X		X



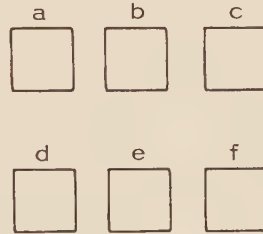
Travail sur la transitivité.

Le tableau représente la relation

"... comporte plus de points que..."

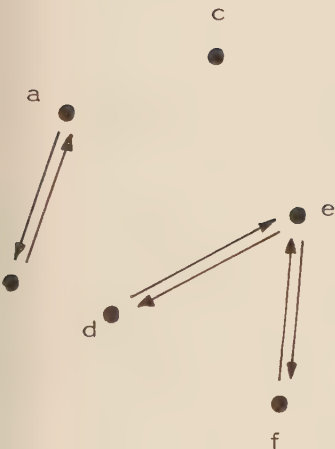
Tracer les croix qui manquent et contrôler en complétant les dés.

	a	b	c	d	e	f
a						
b					X	
c						X
d			X			
e				X		
f	X					



On a tracé quelques flèches représentant la relation

"... comporte le même nombre de points que..."



Parmi les phrases suivantes, lesquelles sont certainement fausses ?

peut-être fausses ou peut-être justes ?
certainement justes ?

- c comporte plus de points que a.
- b comporte moins de points que a.
- b comporte moins de points que d.
- e ne comporte pas plus de points que a.
- f comporte le même nombre de points que e.
- f comporte le même nombre de points que c.
- d comporte le même nombre de points que f.

15.5 Exemples d'activité sur le produit cartésien

Les premiers travaux sur le produit cartésien conduisent l'enfant à la construction de tous les couples que l'on peut constituer en prenant un élément dans un ensemble A et un élément dans un ensemble B.

Exemples : A = quatre pantalons de couleurs différentes.

B = trois vestes de couleurs différentes.

On peut se vêtir de 12 manières présentant au moins une différence.

A = cinq formes différentes.

B = quatre types de gommettes à coller sur les formes précédentes.

On peut confectionner 20 figures différentes.

On notera que, dans ces deux cas, le produit n'est pas commutatif. Il en ira de même si l'on cherche à dresser la liste de tous les menus différents qui peuvent être constitués au moyen de quatre entrées, trois plats de résistance et trois desserts. L'approche du produit cartésien ayant été présentée en détail dans un autre ouvrage (64), nous aborderons directement une série d'activités accessibles à des enfants de 9 à 11 ans. Reprenons, pour cela, un matériel composé de simples dés à jouer.

a) Somme de deux dés ou plusieurs dés.

Individuellement, ou par groupes restreints, les élèves construisent l'ensemble produit et cherchent un moyen de le représenter. Avec deux dés, la représentation est aisée.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Avec trois dés, la représentation est plus difficile. On fera confiance à l'imagination des enfants qui, par exemple, proposeront la solution suivante :

+	1	2	3	4	5	6
1 + 1	3	4	5	6	7	8
1 + 2	4	5	6	7	8	9
1 + 3	5	6	7	8	9	10
1 + 4	6	7	8	9	10	11
1 + 5	7	8	9	10	11	12
1 + 6	8	9	10	11	12	13
2 + 1	4	5	6	7	8	9
2 + 2	5	6	7	8	9	10
2 + 3	6	7	8	9	10	11
etc						

Ils prendront alors conscience de la commutativité de l'addition qui leur permettra de diminuer la dimension du tableau.

b) Produit de deux dés.

L'exercice consiste cette fois à multiplier le nombre des points d'un dé par celui de l'autre. Là encore, le travail par groupes fournira la quantité d'information nécessaire. Si la classe est divisée en dix groupes de trois enfants et que chaque groupe lance les dés dix fois nous obtiendrons 100 valeurs qui pourront être reportées dans la table ci-dessous :

1.	7.	13.	19.	25.	31.
2.	8.	14.	20.	26.	32.
3.	9.↓	15.	21.	27.	33.
4.	10.	16.	22.	28.	34.
5.	11.	17.	23.	29.	35.
6.	12.	18.	24.	30.	36.

Deux questions se posent aux enfants à l'examen de ces données. Comment se fait-il que les nombres 7, 11, 13, ... etc... n'apparaissent jamais ? Pourquoi les nombres 6 et 12 apparaissent-ils plus fréquemment que les autres ?

La réponse à la première question est triviale. Quant à la seconde, la réponse sera donnée par la construction de l'ensemble produit.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Puisque les nombres 6 et 12 peuvent être obtenus de quatre manières différentes, il est naturel de les voir apparaître plus fréquemment que les nombres 1, 9, 16, ... etc... qui sont obtenus par une seule combinaison. On touche déjà, dans ce cas, à une approche intuitive de l'idée de probabilité.

c) Combinaison de trois dés.

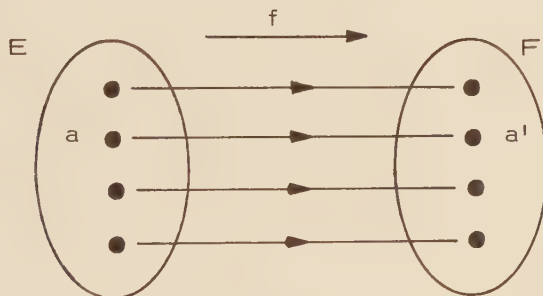
On peut ensuite demander aux élèves de trouver une nouvelle règle du jeu permettant, à l'aide d'un troisième dé, d'atteindre n'importe quel nombre de 0 à 35. Il s'agira alors de multiplier la valeur de deux dés et de retrancher celle du troisième. Dans ce cas, la recherche des chances d'apparition de chaque nombre sera beaucoup plus difficile. On pourra la réserver aux sujets les plus doués.

Le lecteur intéressé n'aura pas de peine à imaginer d'autres combinaisons de 3, voir de 4 dés.

15.6 L'application : les opérateurs numériques

L'analyse des épreuves de contrôle a prouvé que la notion d'opérateur numérique ou, pour employer le langage couramment utilisé dans les classes, les machines à additionner et à soustraire, à multiplier et à diviser, constituait une difficulté importante. Dans ce domaine, les possibilités des élèves ont été largement surestimées. Les enquêtes effectuées ont montré que le corps enseignant ne voyait en général, dans ces fameuses "machines", qu'une manière différente de présenter les exercices de calcul mental que l'on trouvait depuis toujours dans l'enseignement de l'arithmétique. Il convient donc de nous arrêter un instant à ce problème en nous appuyant sur les travaux de M. ROBERT (65). Distinguons tout d'abord nettement les termes "opération" et "opérateur (machine)". En effet, leur ressemblance peut donner lieu à une confusion. Souvent l'on croit, lorsqu'on effectue une opération, que l'on utilise un opérateur. En réalité, il s'agit de deux choses très différentes l'une de l'autre.

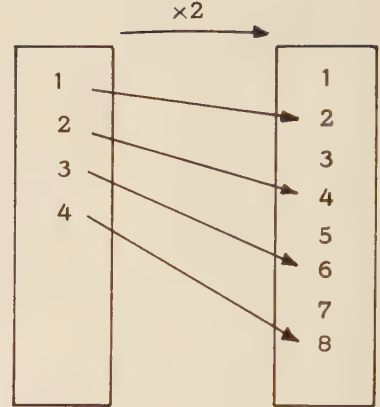
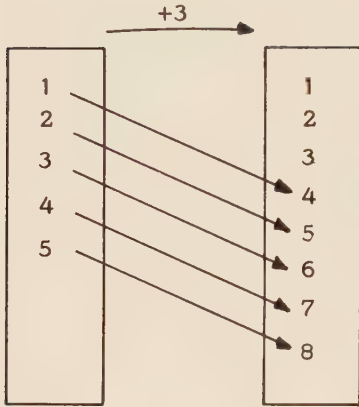
L'opérateur ou la "machine" détermine une application d'un ensemble E vers un ensemble F . C'est-à-dire qu'à tout élément de E correspond un et un seul élément de F .



Si $a \in E$ et $a' \in F$, on peut dire que l'image de a , par l'application f , est a' .

En d'autres termes, s'il s'agit d'une application numérique, l'opérateur fait correspondre, à n'importe quel nombre, un nombre. Nous avons donc, par exemple, une application de N vers N .

Exemples :



L'opération ou la loi de composition est une application de $E \times E$ dans E , ce qui signifie qu'à un couple d'éléments de l'ensemble, on fait correspondre un seul élément. Soit dans le domaine numérique :

$x \in \mathbb{N} ; y \in \mathbb{N} ; z \in \mathbb{N}$

$\langle x, y \rangle \longrightarrow z$ au couple x, y correspond z

$\langle x, y \rangle \longrightarrow x * y$ au couple x, y correspond la composition de x et de y selon l'opération choisie.

Exemples :

ADD $\langle 5, 4 \rangle \longrightarrow 5 + 4$

SOUST $\langle 5, 4 \rangle \longrightarrow 5 - 4$

MULT $\langle 5, 4 \rangle \longrightarrow 5 \times 4$

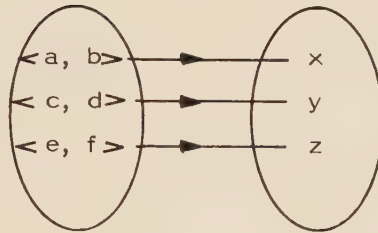
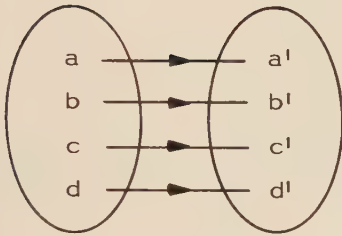
En résumé, il est indispensable de distinguer clairement opérateur et opération.

Opérateur

Opération

$$E \longrightarrow F$$

$$E \times E \longrightarrow E$$

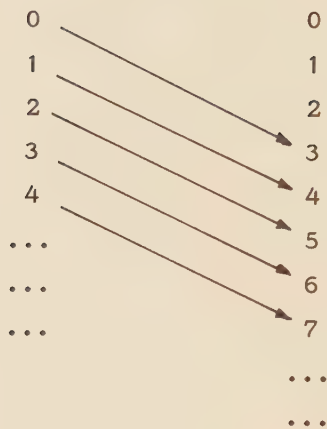


Une erreur commise fréquemment dans l'enseignement consiste à faire varier à la fois les éléments de départ et les opérateurs et de croire ainsi que, lorsque l'enfant a appliqué un opérateur sur un nombre, il est immédiatement capable de généraliser la situation à l'ensemble des entiers naturels.

Prenons le cas particulier d'un opérateur additif, par exemple, ajouter 3. A chaque nombre, nous pouvons faire correspondre son image. C'est l'application qui donne :

$$\begin{array}{lcl} 0 & \longrightarrow & 0 + 3 \\ 1 & \longrightarrow & 1 + 3 \\ 2 & \longrightarrow & 2 + 3 \\ 3 & \longrightarrow & 3 + 3 \\ \dots & \longrightarrow & \dots \dots \\ \dots & \longrightarrow & \dots \dots \end{array}$$

Tous les entiers naturels figurent dans la liste de gauche mais il y a des naturels qui ne se trouvent pas dans la liste de droite. Pour mieux saisir cette notion, utilisons une autre représentation.



0, 1 et 2 ne figurent pas dans l'ensemble des images donc :

- Tout entier naturel de la liste de gauche a une image dans la liste de droite.
- Il y a des entiers naturels de la liste de droite qui ne sont pas image d'un élément de la liste de gauche.

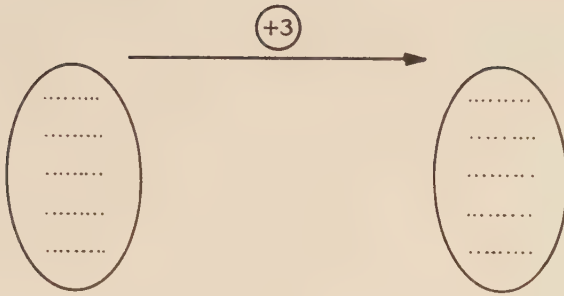
Nous décrivons alors l'opérateur numérique "ajouter 3" à partir de trois constituants :

- a) l'ensemble de tous les entiers naturels, liste de gauche;
- b) l'ensemble de tous les entiers naturels, liste de droite ;
- c) l'ensemble de toutes les flèches reliant un naturel à son image

Et nous noterons $\dots \xrightarrow{+3} \dots$ en sachant bien que ce symbole représente la synthèse des trois constituants ci-dessus

L'écriture $2 \xrightarrow{+3} 5$ n'a donc pas de sens. Il faudrait écrire :

$N \xrightarrow{+3} N$ et $2 \xrightarrow{+3} 2 + 3$, ou, comme cette écriture est difficile à comprendre pour de jeunes enfants représenter graphiquement l'application sous la forme :



L'enfant restera libre de choisir les éléments de l'ensemble de gauche et ceux de l'ensemble de droite qui leur correspondent.

Remarquons encore que le "+" qui figure dans la notation de l'opérateur en fait partie intégrante. On ne peut pas dissocier "+" de "3". C'est donc un signe prédicatoire alors que le "+" de la somme "4 + 3" est un signe opératoire qui indique quel traitement il faut faire subir aux deux éléments d'un couple.

Donc, la différence fondamentale entre l'addition et l'opérateur "ajoute 3" se situe au niveau du premier constituant.

Dans l'addition, c'est l'ensemble de tous les couples soit :

$$N \times N \longrightarrow N \qquad \langle 3, 5 \rangle \longrightarrow \underbrace{3 + 5}_{8}$$

Avec l'opérateur, le premier constituant n'est pas un couple mais l'ensemble de tous les entiers naturels soit :

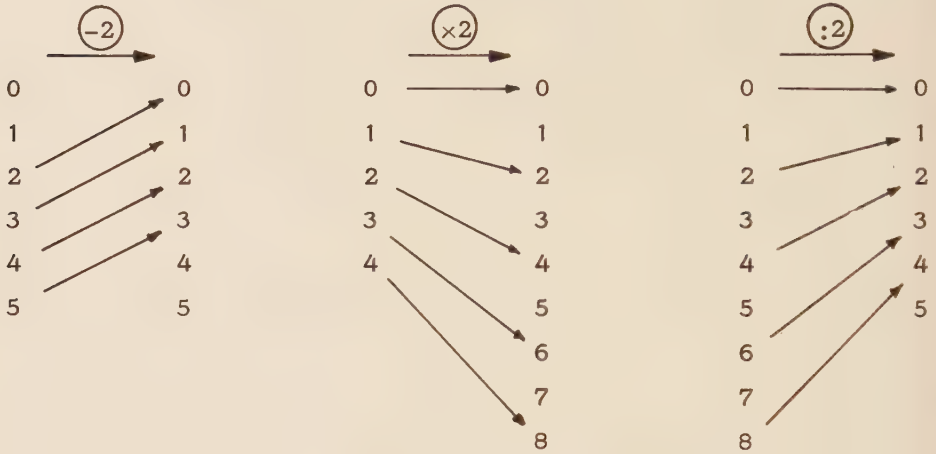
$$N \xrightarrow{+3} N \qquad 5 \longrightarrow \underbrace{5 + 3}_{8}$$

L'opérateur n'est donc pas une loi de composition dans N , ce n'est pas une opération. Il s'ensuit que la question :

$$4 \xrightarrow{(?)} 8$$

ne devrait jamais être posée aux élèves puisque, isolée, elle n'a aucun sens.

Tout ce qui précède s'applique, de la même manière, aux autres opérateurs .

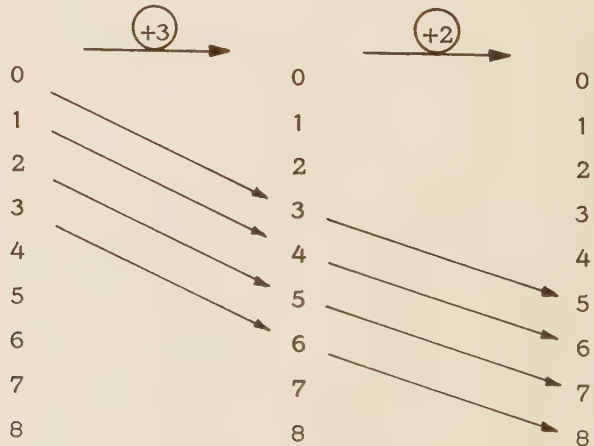


Remarquons simplement qu'avec l'opérateur multiplicatif, comme avec l'opérateur additif, tout nombre a une image. Avec les deux autres opérateurs, tout nombre entier est une image.

Abordons maintenant la composition d'opérateurs numériques de même type.

Puisque la liste de droite est la même que celle de gauche, l'idée vient tout naturellement de faire jouer à la liste de droite le rôle d'une liste de gauche pour un nouvel opérateur.

Exemple :



Notons au passage l'approche intuitive de l'idée d'infini.

On pourrait ajouter 9 à droite afin de tracer encore une flèche mais il faudrait l'ajouter aussi à gauche ... etc ...

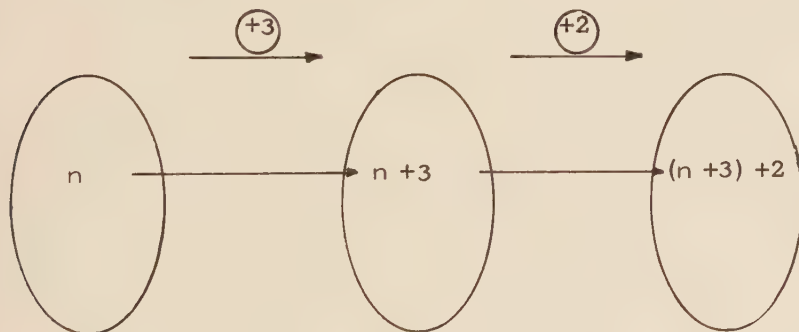
La question se pose de savoir s'il existe un opérateur ayant pour liste de gauche la première, pour liste de droite la dernière et pour ensemble de flèches celles qui relient 0 à 5, 1 à 6, 2 à 7, etc... C'est l'opérateur "ajouter 5".

Nous pouvons donc composer les opérateurs "ajouter 3" et ajouter "2", ce qui peut se représenter par



Pourquoi en est-il ainsi ? Avec l'opérateur  un nombre naturel quelconque a pour image $n + 3$.

Avec l'opérateur , nous obtenons $(n + 3) + 2$.



Mais, puisque l'addition est associative :

$$(n + 3) + 2 = n + (3 + 2) = n + 5$$

Le composé de deux opérateurs additifs est un opérateur additif parce que l'addition est associative.

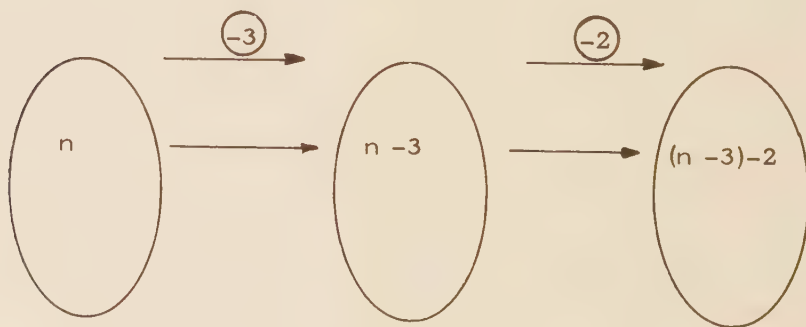
Le lecteur trouvera probablement que nous exagérons les circonlocutions pour aboutir à quelque chose de fort simple. En réalité, un grand nombre d'échecs provient d'une mauvaise compréhension de ce qui précède. Cette incompréhension n'empêche pas l'enfant d'additionner correctement. Elle ne l'empêche pas non plus de multiplier puisque la situation est très voisine,



$$(n \times 3) \times 2 = n \times (3 \times 2) = n \times 6$$

encore que de nombreux élèves commettent assez tardivement l'erreur qui consiste à additionner les opérateurs multiplicatifs.

Cependant, c'est avec la soustraction que nous allons rencontrer la véritable difficulté. En effet, il s'agira d'accepter le fait que le composé de deux opérateurs soustractifs est bien un opérateur du même type mais qu'il s'écrit à l'aide de la somme (et non de la différence) des nombres figurant les deux premiers opérateurs.



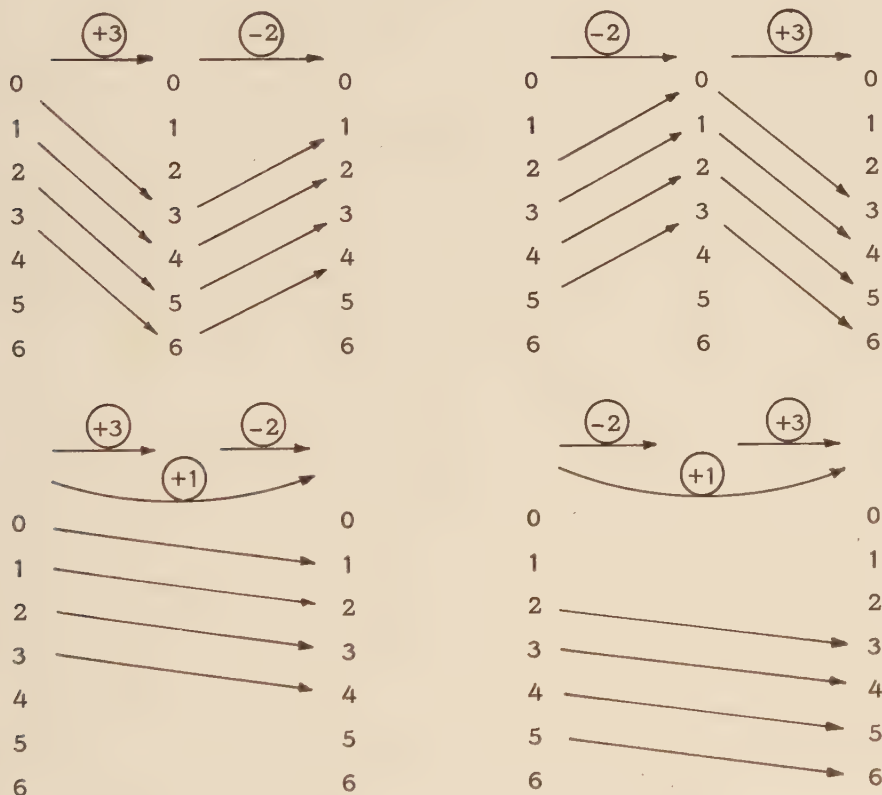
$$(n - 3) - 2 = n - (3 + 2) = n - 5$$

De la même manière, dans la division, le composé de deux opérateurs s'écrit à l'aide du produit de ceux-ci :

$$(n : 4) : 3 = n : (4 \times 3) = n : 12$$

Mais nous ne sommes pas au bout de nos peines. Jusqu'ici, nous n'avons composé que des opérateurs du même type et la question de la commutativité ne s'est pas posée.

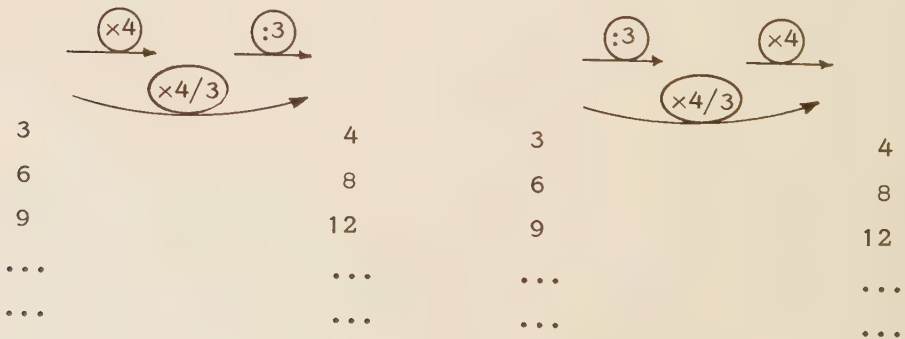
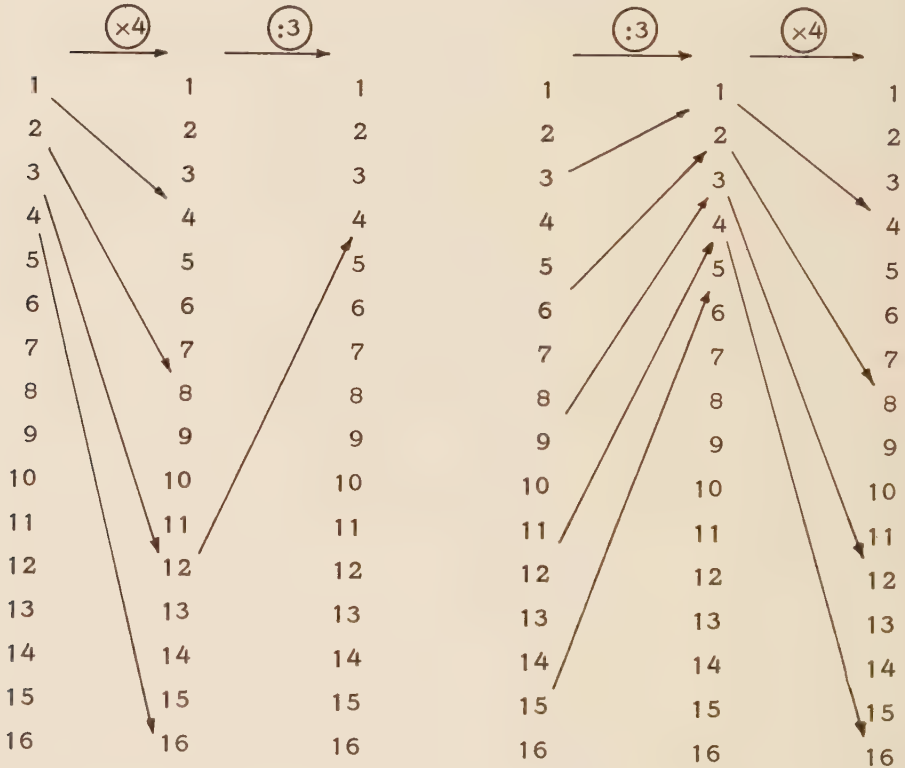
Examinons maintenant ce qu'il advient lorsque les opérateurs sont de nature différente :



On constate que c'est par un abus de langage que l'on admet, dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, que la composition des opérateurs $" + 3 ; - 2 "$ a le même effet que celle des opérateurs $" - 2 ; + 3 "$. En fait, dans le premier cas, l'ensemble de gauche s'étend de zéro à l'infini tandis que dans le second, il ne s'étend que de 2 à l'infini.

Il faut donc recourir à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers positifs et négatifs pour que la commutativité s'applique sans restriction. Or, trop souvent, l'école primaire considère comme allant de soi des notions qui posent de sérieux problèmes à l'enfant.

La multiplication et la division soulèvent des problèmes du même ordre.

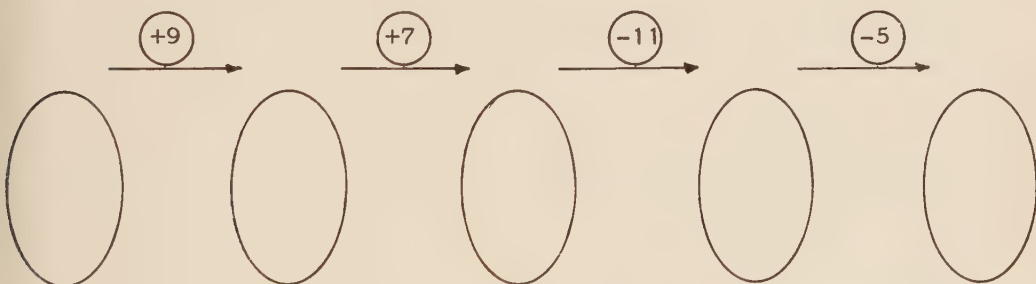


Ici se posera donc le problème du choix convenable de l'ensemble de départ, la généralisation ne pouvant intervenir qu'avec le recours à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Les exercices portant sur les applications numériques ont donc pour objet principal la découverte de relations entre familles de nombres et la construction de structures numériques intéressantes. Dans ces exercices, une très large part devra être réservée aux inventions personnelles des enfants.

15.7 Exemples d'activités sur les relations numériques

En deuxième et troisième années, les exercices devraient principalement consister en des activités très libres dans lesquelles l'enfant choisit les opérateurs, les applique sur un ensemble de nombres et cherche à découvrir le composé de deux ou de plusieurs opérateurs. A cet égard, il est de première importance que l'exploration s'effectue de manière aussi libre et aussi complète que possible. Pour mieux illustrer cette nécessité nous aurons recours à la description d'une leçon ayant eu lieu dans la seconde moitié de la troisième année, c'est-à-dire dans une classe dont les élèves avaient en moyenne 9 ans et faisaient preuve d'une assez grande habileté de calcul. Le problème proposé était le suivant :



Les élèves sont invités à construire une suite de nombres correspondant à l'application de ces opérateurs. Ils proposent :

1	→	10	→	17	→	6	→	1
7	→	16	→	23	→	12	→	7
3	→	12	→	19	→	8	→	3
11	→	20	→	27	→	16	→	11

A ce moment, la classe constate que le nombre de droite est le même que le nombre de départ. Le maître leur pose la question :

- En sera-t-il toujours de même ou doit-on effectuer d'autres essais ?

Réponse quasi-unanime : cela marche avec les nombres impairs mais cela ne marchera probablement pas avec des nombres pairs. On procède donc à de nouveaux essais :



Le maître pose à nouveau la même question. Réponse d'un élève :

- C'est de la magie.

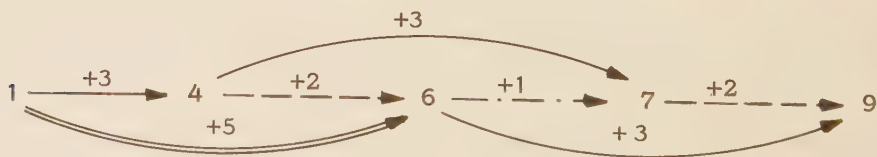
Réponses d'autres enfants :

- Ça marche parce que les nombres sont petits. Si l'on prenait 40 ou 100 au départ, cela n'irait plus.

On constate donc, par cet exemple vécu, que le fait d'avoir vérifié une donnée dans un certain nombre de cas ne conduit pas sans peine à la généralisation de la loi de composition.

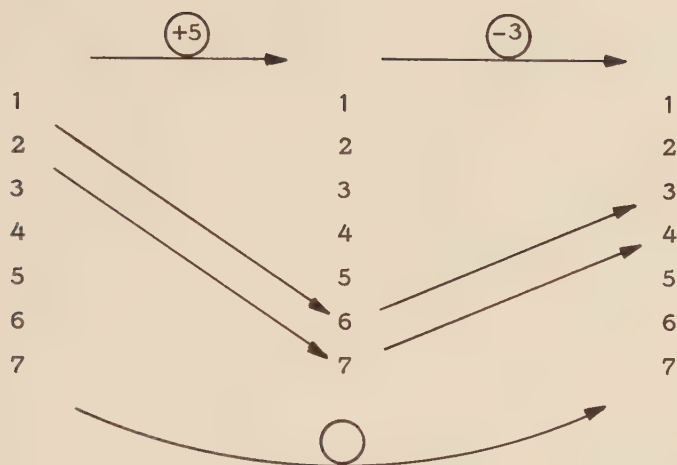
Nous suggérons donc, dans les trois premiers degrés, la construction libre de chaînes de nombres sur le modèle des exercices développés par F. Papy (66).

Exemple :



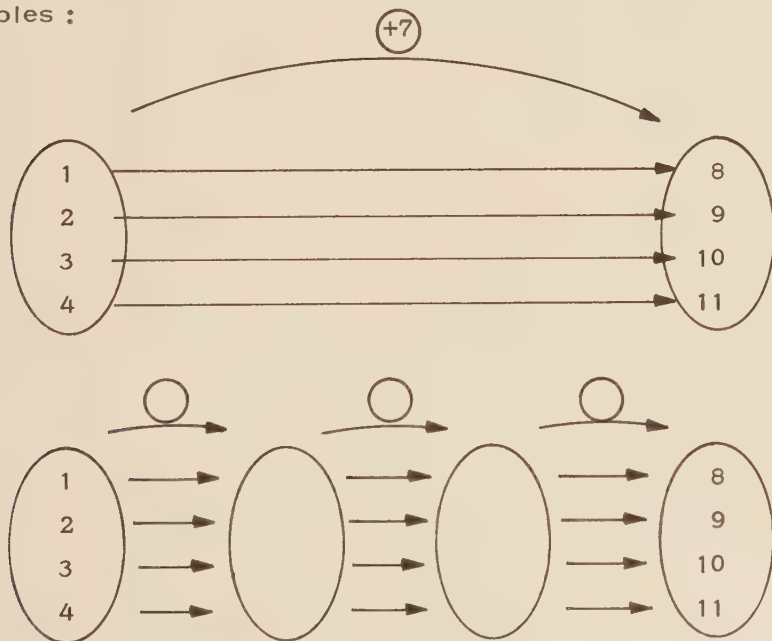
En second lieu, on exercera l'application sur un ensemble de nombres choisis par l'enfant qui essaiera de découvrir quel opérateur est le composé de deux ou de plusieurs opérateurs.

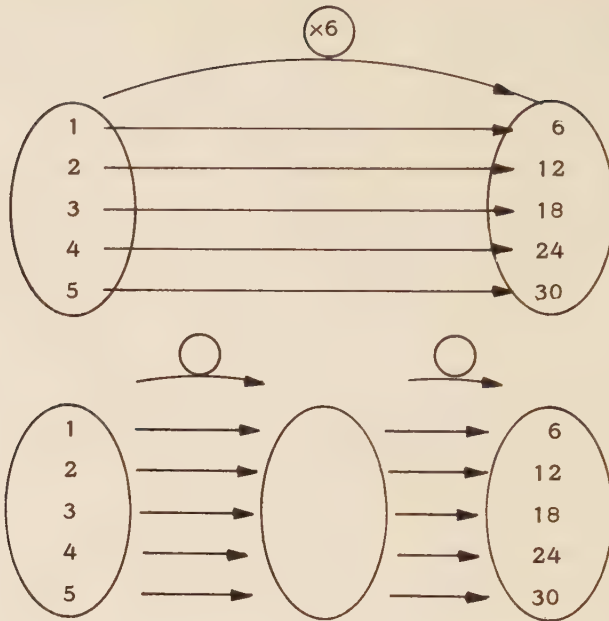
Exemples :



Une troisième sorte d'exercice consistera à décomposer un opérateur en plusieurs autres.

Exemples :

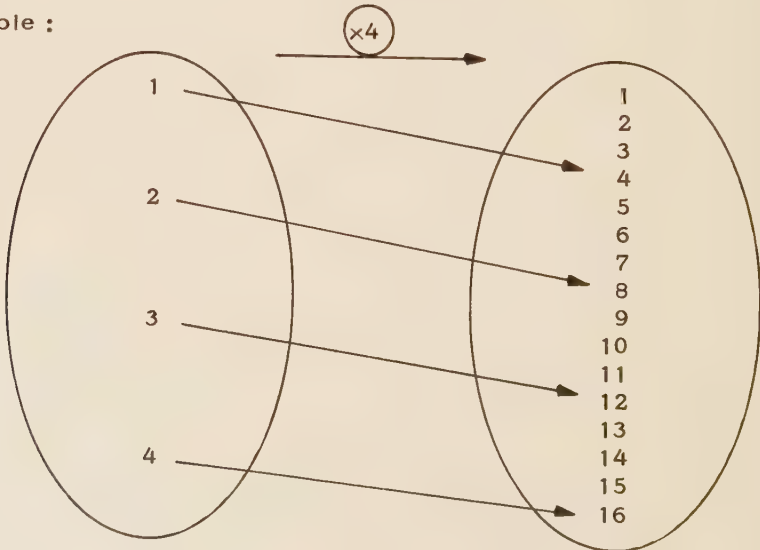




A partir de la quatrième année, outre les exercices du même type destinés à une meilleure structuration de l'ensemble des nombres les enfants seront amenés à réfléchir sur la définition de l'ensemble sur lequel peuvent s'appliquer un ou plusieurs opérateurs selon la démarche explicitée dans le paragraphe 18.6.

En cinquième et sixième années, l'extension aux nombres à virgule donnera l'occasion de nouvelles recherches.

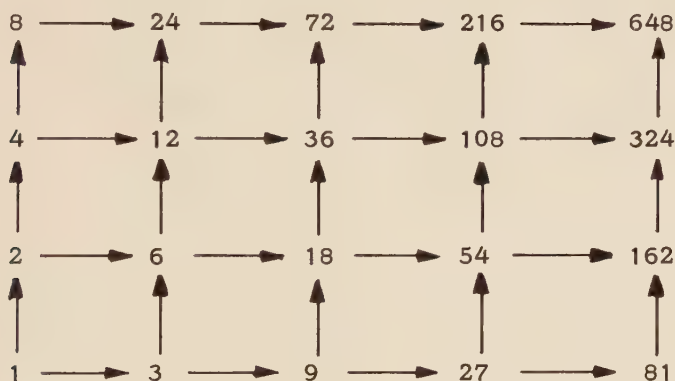
Exemple :



Pourrait-on compléter l'ensemble de départ pour qu'une flèche arrive à 6, à 10, à 2 ?

Peut-on faire en sorte que tous les nombres d'arrivée soient image d'un nombre de départ ? (L'ensemble de départ sera donc : 0,25; 0,50 ; 0,75 ; 1 ; 1,25; 1,5 ; etc..)

Dans le même ordre d'idée, l'analyse d'une structure de treillis donnera lieu à des activités fort intéressantes. Commençons par un cas très simple dans lequel la flèche horizontale signifie que le nombre est multiplié par 3 tandis que la flèche verticale indique que le nombre est multiplié par 2.



Remarquons tout d'abord que, pour trouver les nombres à introduire dans ce treillis, l'enfant dispose toujours de deux cheminements ; ainsi le nombre 108 s'obtient en multipliant 36 par 3 ou en multipliant 54 par 2. Il y a donc constamment une possibilité de contrôle.

Une seconde remarque, banale, est que l'on pourrait déterminer la réciproque de cette relation en retournant le sens de la flèche, "multiplié par 3" devenant "divisé par 3".

8	←	24	←	72	←	216	←	648
↓		↓		↓		↓		↓
4	←	12	←	36	←	108	←	324
↓		↓		↓		↓		↓
2	←	6	←	18	←	54	←	162
↓		↓		↓		↓		↓
1	←	3	←	9	←	27	←	81

Mais cette remarque est plus intéressante qu'il n'y paraît au premier abord. En effet, on constate que, pour un nombre quelconque du tableau, l'ensemble des nombres placés à sa gauche ou au-dessous constitue l'ensemble de ses diviseurs.

Prenons, à titre d'exemple le nombre 36

4	—	12	—	(36)
2	—	6	—	18
1	—	3	—	9

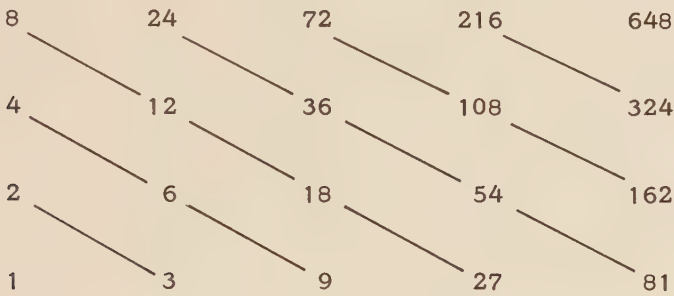
L'ensemble des diviseurs de 36 est bien :

$$\text{Div}_{36} = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 \}$$

Nous continuerons l'analyse du tableau par l'établissement de nouvelles relations selon les diagonales.

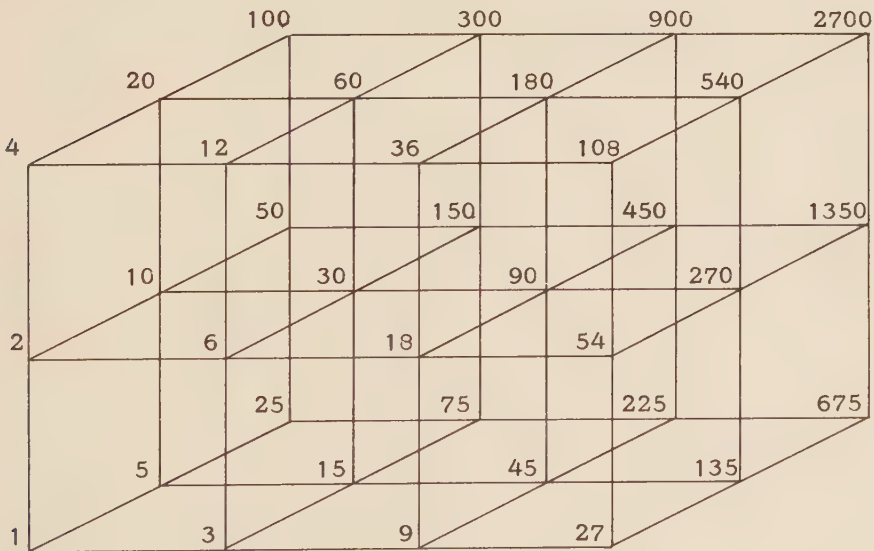
8	24	72	216	648
4	12	36	108	324
2	6	18	54	162
1	3	9	27	81

La relation sera alors "est multiplié par 6" tandis que la réciproque sera "est divisé par 6" ou "est le sixième de".



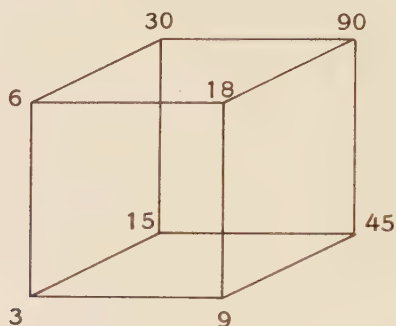
Nous voyons apparaître ici la relation "vaut les $\frac{2}{3}$ de" avec sa réciproque "vaut les $\frac{3}{2}$ de".

Jusqu'ici, nous avons travaillé dans un espace à deux dimensions. L'extension à une troisième dimension rendra l'exercice plus riche encore. Nous allons, pour cela, ajouter la multiplication par cinq.

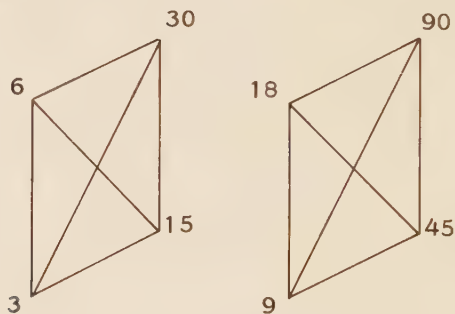


Le dessin ci-dessus paraît un peu compliqué. L'activité des élèves sera grandement facilitée si ceux-ci peuvent travailler sur un parallélépipède formé, par exemple, de tiges de mécano ou de tringles métalliques. Dans l'exercice en deux dimensions, nous avons constaté

la présence de huit relations différentes. Combien en avons-nous maintenant ? Prenons n'importe lequel des cubes qui composent le parallélépipède.

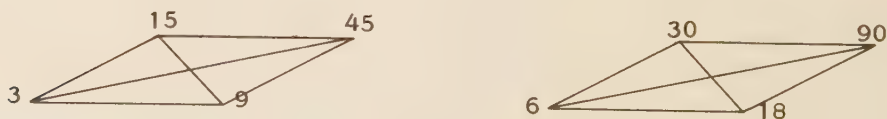


Nous retrouvons, sur les faces avant et arrière les huit relations déjà signalées. On peut, en considérant les faces latérales, trouver six nouvelles relations.



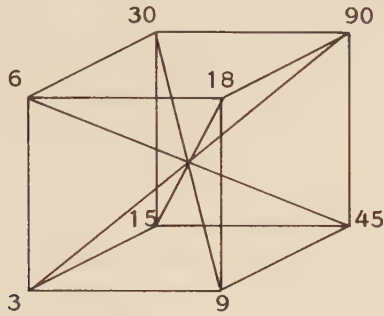
Multiplié par 5 ; divisé par 5 ;
Multiplié par 10 ; divisé par 10 ;
Multiplié par $5/2$; multiplié par $2/5$.

Si nous examinons de la même manière les faces horizontales, nous voyons apparaître quatre autres relations.



Multiplié par 15 ; divisé par 15
Multiplié par $5/3$; divisé par $5/3$

Enfin, nous pouvons envisager les diagonales du cube et nous trouvons encore huit relations.



Multiplié par 30 ; divisé par 30

Multiplié par $3/10$; multiplié par $10/3$

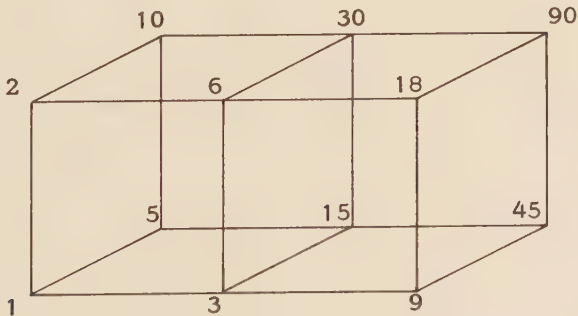
Multiplié par $2/5$; multiplié par $15/2$

Multiplié par $5/6$; multiplié par $6/5$

On a donc la possibilité de travailler au total 13 relations et leur réciproque. Notons encore que chacun des cubes présente le même ensemble de relations et que le premier d'entre eux, en avant, en bas et à gauche, en donne la forme la plus simple, c'est-à-dire la forme canonique.

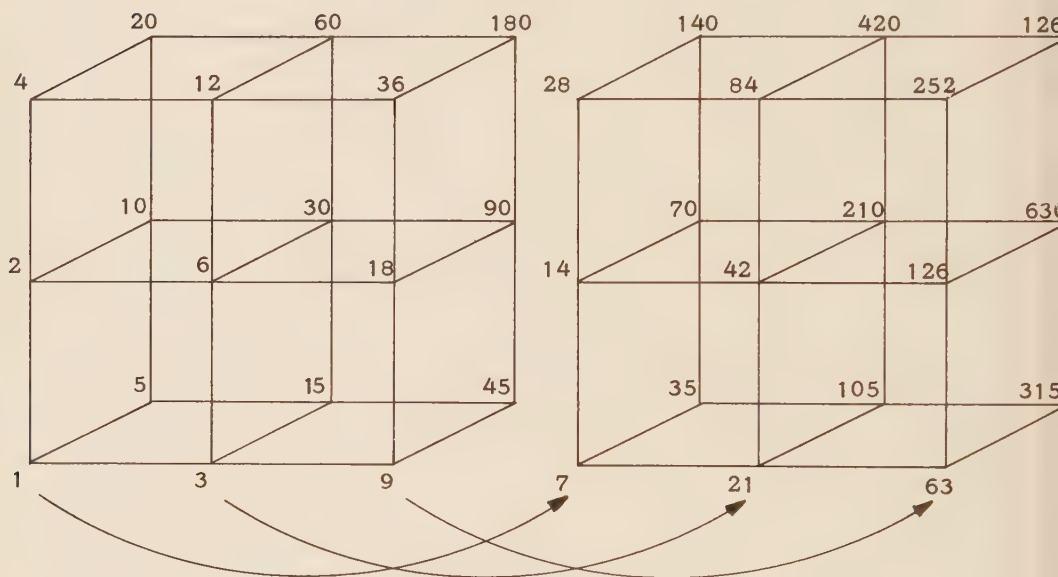
Une autre remarque s'impose encore. Nous avons vu dans le treillis à deux dimensions que l'ensemble des diviseurs d'un nombre se situait à gauche et au-dessous de ce nombre. Nous voyons maintenant que la règle reste valable si l'on prend les nombres placés à gauche, au-dessous ou en avant du nombre.

Exemple :



$$\text{Div}_{90} = \left\{ 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90 \right\}$$

Il serait possible enfin, avec les élèves les plus âgés et les plus doués, d'effectuer une approche intuitive d'un espace à n dimensions. Si nous limitons à l'approche d'une quatrième dimension, nous chercherons quel est le plus petit nombre ne figurant pas encore dans le treillis qui précède. Les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont apparus. C'est donc le nombre 7 qui donnera la quatrième dimension que nous pourrions représenter par une translation du treillis.



Tous les nombres sont multipliés par 7 ; les relations construites précédemment sont conservées.

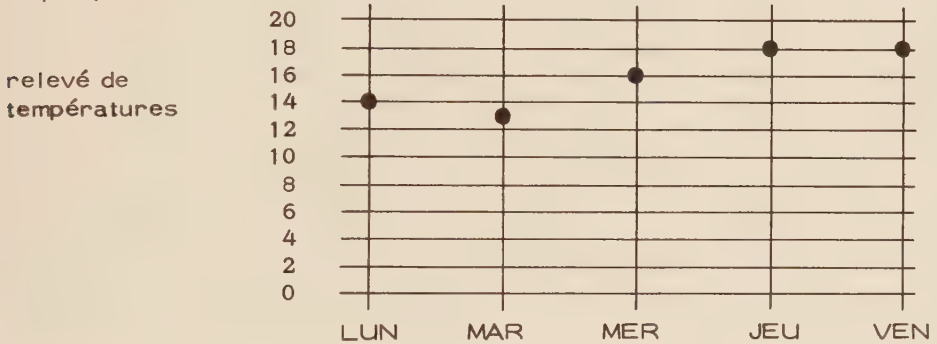
Il n'est pas nécessaire d'insister sur la richesse d'une telle activité dans le domaine de l'entraînement au calcul numérique.

15.8 Les applications linéaire et affine

Il nous reste, pour achever le survol de la notion de relation, à traiter brièvement des applications affines. Ici, nous admettrons que les élèves sont capables d'utiliser un diagramme cartésien et de travailler dans un système de coordonnées (la construction de ces notions apparaît dans le chapitre consacré à l'exploration de l'espace). Nous nous adressons donc principalement à des élèves de cinquième et de sixième années, seuls les cas les plus élémentaires pouvant être abordés avec fruit en quatrième.

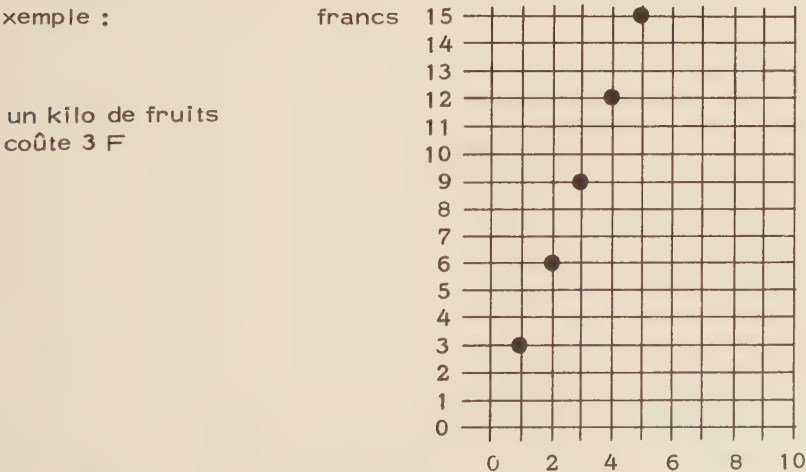
Les premiers travaux consisteront à utiliser le diagramme cartésien pour représenter un certain nombre d'informations.

Exemple :

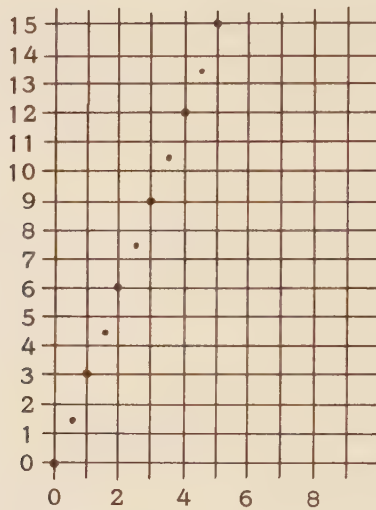


Une seconde étape conduira à l'approche de l'application linéaire. Tout d'abord, comme ci-dessus, les enfants porteront dans le graphique des informations ponctuelles.

Exemple :



Ils chercheront ensuite à inscrire le prix de quantités intermédiaires.



La répétition de plusieurs exercices de ce type provoquera la découverte du fait que tous les points cherchés se situent sur la même droite.

La recherche dépassera les limites de la simple représentation lorsque le maître invitera ses élèves à une réflexion sur les couples obtenus, préparant ainsi la notion de proportion. Dans la situation ci-dessus, nous pouvons relever un certain nombre de couples.

1	→	3
2	→	6
3	→	9
4	→	12
5	→	15

Comment trouver le couple suivant qui n'apparaît pas dans le tableau ?

Plusieurs manières de faire sont à notre disposition :

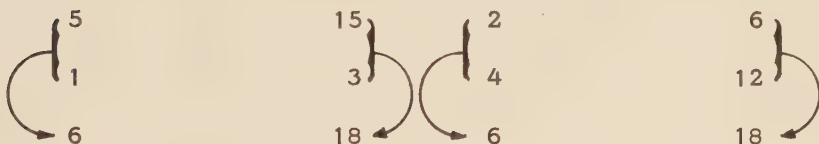
- Multiplier chaque valeur du premier couple par 6



- Doubler les valeurs du couple $\langle 3 ; 9 \rangle$



- Additionner deux à deux les valeurs de certains couples



Des exercices de ce genre devraient permettre à l'enfant une approche intuitive de certaines propriétés de l'application linéaire soit :

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$f(k \cdot a) = k \cdot f(a)$$

Nous retrouvons ici, sous une forme quelque peu différente, ce que l'on appelle le calcul proportionnel ou encore, la fameuse "règle de trois" si longtemps en honneur dans les écoles.

Un des objectifs de ces activités devrait être de rendre plus aisé la recherche des solutions d'un problème.

Exemple : Si 8 mètres d'étoffe coûtent 22,50 F, quel est le prix de 32 mètres ?

Il est ici inutile de calculer le prix d'un mètre. Il suffit, en effet, d'établir la relation existant entre 8 et 32



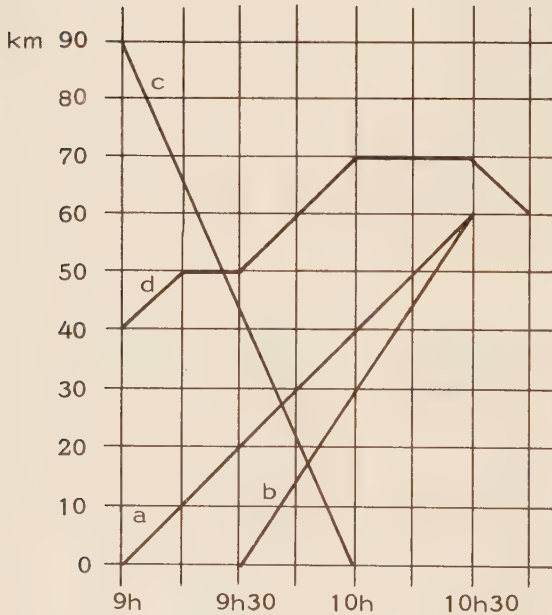
Puisque $32 = 4 \cdot 8$ $f(32) = 4 f(8)$ soit 90.

Le même type d'exercices et de représentations permettra la compréhension de toute une série de problèmes :

achat, vente, bénéfice, perte;
transformation d'unités ;
pourcentages ;
déplacements et vitesses ;
échelles;
etc...

Le passage au cas plus général de l'application affine, ou même affine par morceaux, ouvrira d'autres possibilités dans le domaine des représentations de déplacements.

Nous n'en donnerons qu'un exemple :



- Quel est le véhicule le plus rapide ?
- A quel heure b a-t-il rattrapé a ? A quelle distance du point de départ ?
- A quel moment a et c se sont-ils croisés ?
- Quel trajet d a-t-il parcouru de 10h. à 10h30 ?
- etc...

16. LA NUMERATION

Dans ce chapitre, nous ne tenterons pas une approche exhaustive de la numération qui nécessiterait de très longs développements mais nous nous bornerons à une description sommaire de trois aspects illustrant nos intentions dans ce domaine : le calcul en différentes bases, les échanges, la construction du nombre à virgule.

16.1 Le calcul en différentes bases

L'étude des groupements en différentes bases a pour objectif la compréhension du système de numération et la préparation à l'apprentissage de la technique des opérations.

Notre système de numération se définit par deux caractéristiques :

- c'est un système à base dix. Dix éléments forment une dizaine, dix dizaines une centaine, etc...
- c'est un système de position. La place d'un chiffre définit sa valeur.

On sait combien l'apprentissage de la numération est difficile pour la majorité des élèves. Les exercices de groupements en différentes bases ont pour objectif de faire dégager par les enfants les principes d'une numération de position. Si l'on se cantonne uniquement au système décimal, d'une part l'élève travaille surtout par mémorisation et ne comprend pas clairement le mécanisme de l'écriture des nombres ; d'autre part, il n'est guère possible de faire manipuler des objets correspondant à un nombre de plus de deux chiffres.

En revanche, le travail en différentes bases donne la possibilité de dominer les principes qui régissent une numération de position et permettent de faire correspondre des nombres de trois ou quatre chiffres à des collections d'objets relativement réduites dont la manipulation est aisément accessible à l'enfant.

En deuxième et troisième années, les activités consistent principalement à coder et à décoder des nombres ainsi qu'à préparer la technique de l'addition et de la soustraction. A partir de la quatrième année, l'accent peut être mis sur une réflexion plus fructueuse qui donne lieu à la fois à une prise de conscience de ce qu'est réellement un système de numération et à une intense activité de calcul.

Exemple : Comment écrire, dans des bases différentes, l'équivalent du nombre cent en base dix ?

Base trois

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	$3 \times 3 \times 3 \times 3$	$3 \times 3 \times 3$	3×3	3	1
243	81	27	9	3	1

Cent se situe entre 81 et 243. On peut donc l'écrire :

$$(1 \times 81) + 19 \quad \text{ou} \quad (1 \times 81) + (2 \times 9) + 1$$

En base trois, l'écriture de ce nombre sera donc :

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	$3 \times 3 \times 3 \times 3$	$3 \times 3 \times 3$	3×3	3	1
1	0	2	0	1	

En sixième année, l'emploi de la notation des puissances permettra d'écrire :

$$(1 \times 3^4) + (2 \times 3^2) + (1 \times 3^0)$$

En base quatre

$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$	$4 \times 4 \times 4 \times 4$	$4 \times 4 \times 4$	4×4	4	1
1024	256	64	16	4	1

Cent vaut : $(1 \times 64) + (2 \times 16) + (1 \times 4)$. Il s'écrit donc :

$4 \times 4 \times 4 \times 4$	$4 \times 4 \times 4$	4×4	4	1
1	2	1	0	

En base dix

$10 \times 10 \times 10 \times 10$	$10 \times 10 \times 10$	10×10	10	1
10 000	1000	100	10	1

Cent vaut (1×100) et s'écrit

10×10	10	1
1	0	0

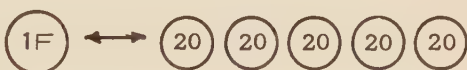
16.2 La notion d'échange

L'idée d'échange dans sa forme la plus simple apparaît relativement tôt, mais elle est généralement fortement liée à l'affectivité ou à la perception. Il n'est pas rare de voir un enfant donner volontiers un jouet de valeur à son camarade en échange d'un bibelot sans importance dont il a fortement envie sur le moment. On sait aussi que, pendant un temps assez long, l'enfant préfère recevoir dix pièces de 10 centimes plutôt qu'une pièce d'un franc parce qu'il a le sentiment d'être plus "riche" lorsqu'il possède un plus grand nombre de pièces.

Pour que l'enfant puisse réellement aborder les jeux d'échanges, il faut qu'il ait surmonté ces problèmes d'ordre affectif ou perceptif et qu'il soit en mesure d'accepter une règle du jeu conventionnelle.

Exemples : a) Règle d'échange 

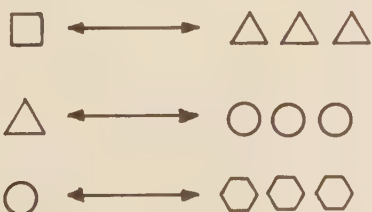
On en déduit que 2 carrés correspondent à 6 triangles, qu'il faut 9 triangles pour 3 carrés, etc...

b) Règle d'échange 

Nous avons ici une règle d'utilisation courante. Qui n'a pas eu cet échange à faire, pour utiliser un distributeur de timbres ou un parcomètre ?

L'exploitation des jeux d'échanges prendra toute sa valeur lorsque nous serons en présence d'une règle de jeu récurrente, c'est-à-dire d'une règle dans laquelle des échanges s'effectuent toujours de la même manière.

Exemples : a) Règle d'échange récurrente.



b) Règle d'échange non récurrente.



c) Règle d'échange récurrente.

1 millier	=	10 centaines
1 centaine	=	10 dizaines
1 dizaine	=	10 unités
1 unité	=	10 dixièmes, etc...

d) Règle d'échange non récurrente.

1 semaine	=	7 jours
1 jour	=	24 heures
1 heure	=	60 minutes

Pour l'apprentissage de la numération et de la technique des opérations arithmétiques, c'est à la notion de récurrence qu'il sera constamment fait appel.

La notion d'échange ou de transformation par récurrence apparaît dans de nombreuses activités mathématiques.

Nous la trouverons tout d'abord dans le mécanisme de l'addition et de la soustraction avec retenue. En base dix, il s'agit de comprendre que 10 unités sont équivalentes à une dizaine, que 10 dizaines valent une centaine, et, par extension, que 30 unités peuvent être indiquées en inscrivant 3 dans la colonne des dizaines, etc...

La même notion sera présente dans la plupart des activités de mesure abordées dès la quatrième année.

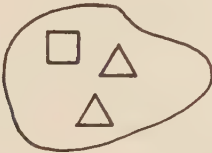
On la retrouvera avec l'étude de la technique de la multiplication et de la division puis, avec un degré d'abstraction plus élevé, lorsqu'on abordera la notion de puissance.

Enfin ce type de mise en correspondance de quantités devant être équivalentes mais formées d'éléments de valeur inégale apparaît dans de très nombreuses situations de la vie courante. Citons, comme seul exemple, les problèmes posés à la ménagère par les comparaisons de qualité, de prix et de quantité lors de chaque achat quotidien.

Il est absolument nécessaire que l'enfant comprenne bien ce que l'on entend par équivalence.

La notion d'équivalence est liée à celle de règle du jeu. Deux collections seront équivalentes selon une certaine règle et non selon une autre règle. En voici un exemple :

Collection A



Collection B



Si la règle du jeu est $\square \longleftrightarrow \triangle \triangle \triangle$ les collections A et B sont équivalentes.

Si la règle du jeu est $\square \longleftrightarrow \triangle \triangle$ les collections A et B ne sont pas équivalentes.

Z.P. Dienes, déclare (67)

"Il est extrêmement important que les enfants saisissent bien que lorsqu'ils emploient le terme équivalent, il y a quelque chose qui se conserve de l'une à l'autre des deux situations décrites comme équivalentes, mais que ce n'est pas toujours la même chose qui se conserve. Avec les nombres orientés, les fractions, etc., les enfants rencontreront d'autres types d'équivalences, et c'est alors qu'ils tireront tout le profit d'avoir, antérieurement, discuté de ce que signifie une équivalence, et d'avoir rencontré sur leur chemin un certain nombre de types différents d'équivalences."

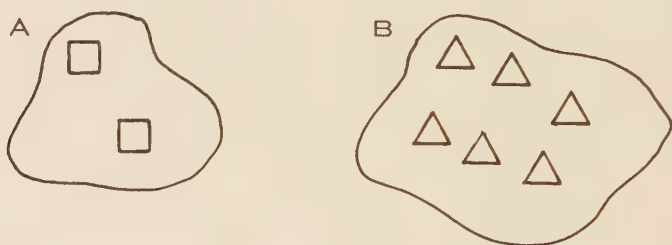
Une des difficultés de la notion d'échange provient donc du fait que l'enfant est contraint de formuler une hypothèse :

- Si la règle d'échange permet de faire correspondre un carré à trois triangles, alors les collections A et B ci-dessus sont équivalentes.

La notion n'est donc pas aussi simple qu'elle pourrait le paraître au premier abord.

Les premiers exercices auront pour objectif de faire comprendre à l'enfant qu'une règle d'échange est forcément arbitraire et qu'elle résulte d'un choix, d'une convention.

Proposons par exemple aux élèves deux collections d'objets de deux sortes différentes :



Nous décidons que ces deux collections sont équivalentes. Quelle déduction peut-on en tirer ?

La règle d'échange choisie est donc :

"un carré vaut trois triangles"

Présentons les deux mêmes collections et cherchons une règle d'échange pour laquelle ces collections ne soient pas équivalentes.

Les enfants découvriront que n'importe quelle règle, à l'exception de l'échange "un contre trois", peut s'appliquer.

Sur la base de cette idée de comparaison et de choix d'une règle d'échange, de nombreux jeux et exercices peuvent être développés. Ils auront tous pour but la prise de conscience que l'équivalence dépend d'une règle préalablement fixée. Aussi longtemps que les enfants n'auront pas parfaitement assimilé cette notion, il faudra constamment avoir recours à la manipulation d'objets concrets : d'abord pour effectuer la mise en correspondance permettant de résoudre le problème, plus tard, pour vérifier la réponse donnée à partir d'une représentation graphique des mêmes éléments.

Exercices.

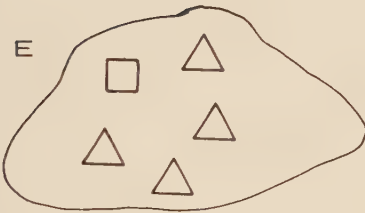
Règle



a) Former une collection équivalente ou non-équivalente.



Former une collection D équivalente à C.

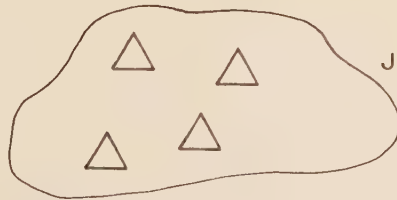
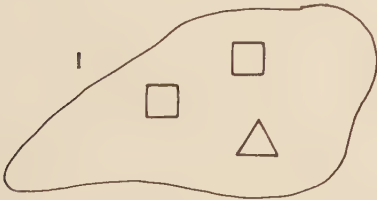


Former une collection F équivalente à E.



Former une collection H qui ait moins de valeur (ou plus de valeur) que G.

b) Modifier une collection.



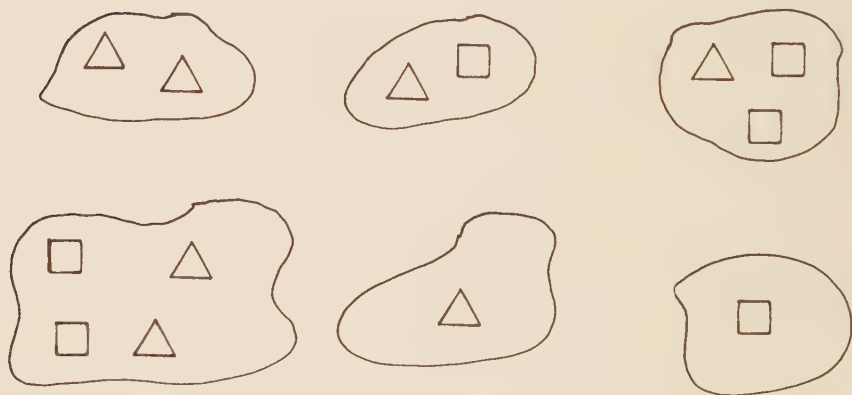
Ajouter des éléments à I ou à J pour que les deux collections soient équivalentes.



Modifier la collection K pour qu'elle soit équivalente à la collection L.

c) Sérier une suite de collections.

Placer dans l'ordre, de celle qui vaut le plus à celle qui vaut le moins, les collections suivantes :



Lorsque la sériation est faite, trouver la collection qui pourrait être intercalée dans la série.

Les exercices qui précèdent peuvent déjà être abordés avec de jeunes enfants pourvu que ceux-ci possèdent suffisamment la notion de conservation. En revanche, la difficulté sera considérablement accrue lorsque l'exercice portera sur une double, voire une triple règle d'échange.

Voici une règle d'échange :

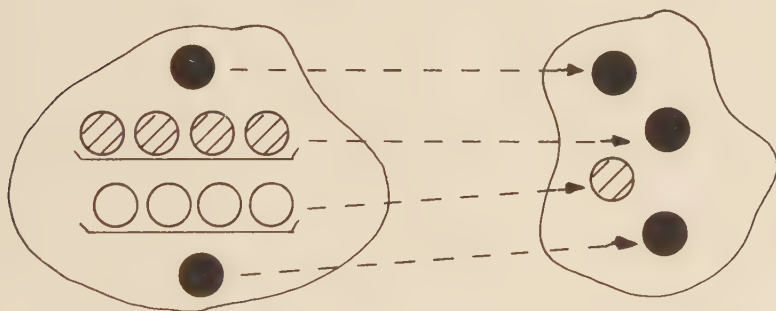


Il s'agit pour les élèves de former une collection équivalente, d'abord librement puis avec des contraintes.

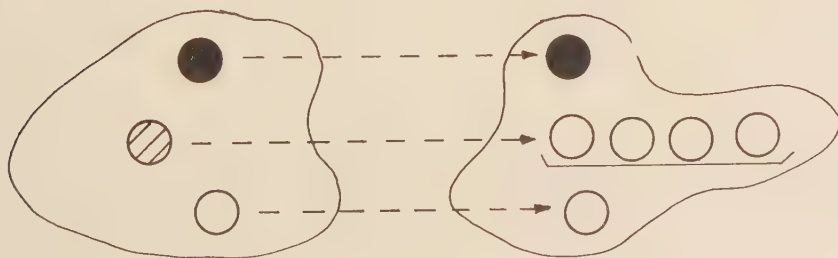
- collection comprenant plus de pièces;
- collection comprenant moins de pièces ?
- collection comprenant des pièces d'une seule sorte ;
- collection comprenant le moins de pièces possible.

Exemples :

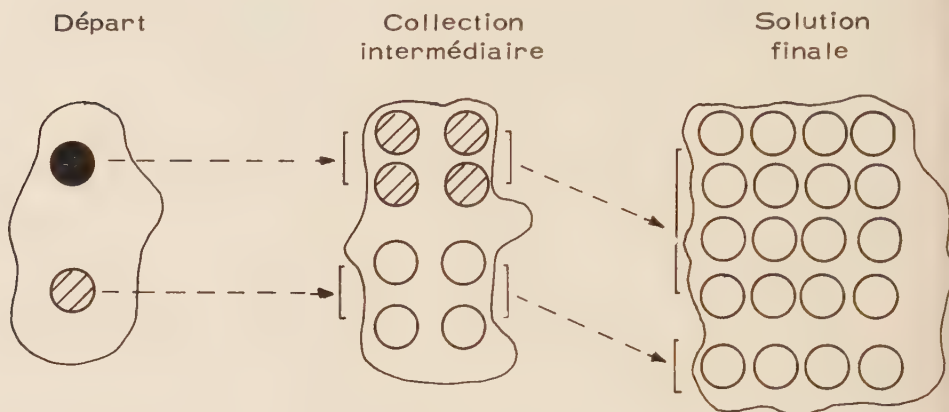
d) Voici une collection. Former une collection équivalente comprenant moins de pièces.



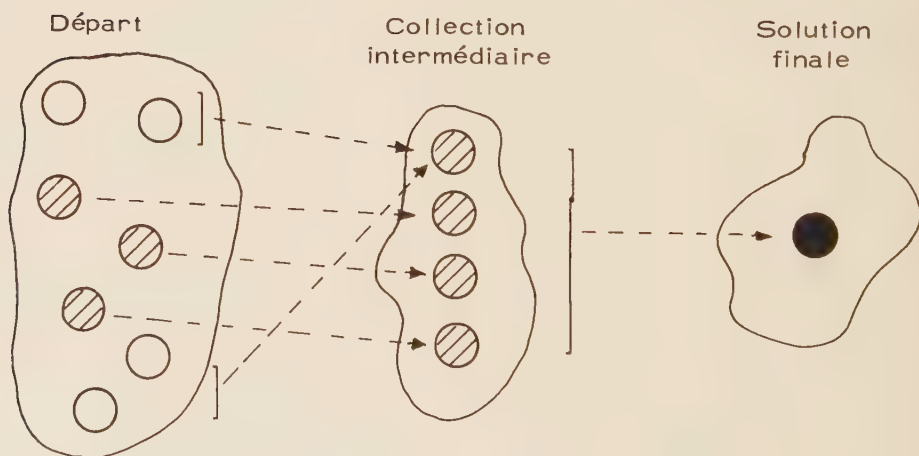
e) Voici une collection. Former une collection équivalente comprenant plus de pièces.



- f) Voici une collection. Former une collection équivalente comprenant le plus de pièces possible.



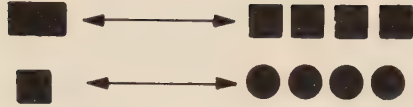
- g) Voici une collection. Former une collection équivalente comprenant le moins de pièces possible.



Après avoir effectué de nombreuses comparaisons entre deux collections, l'enfant pourra aborder la recherche de toutes les collections équivalentes à une certaine donnée. Cette recherche se fera d'abord empiriquement, sans ordre établi.

Exemple :

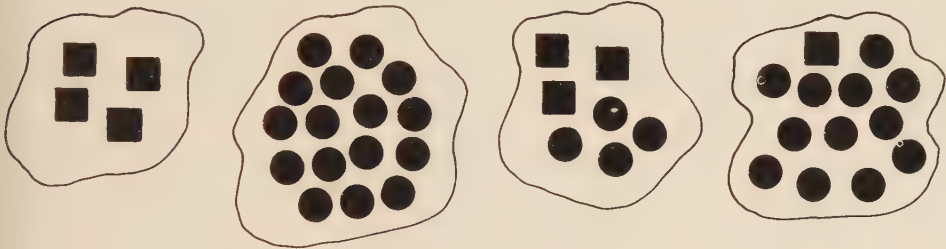
règle



Problème :

Trouver des collections d'éléments équivalentes à un rectangle.

Réponses données par les élèves :



Question : - Avons-nous trouvé toutes les réponses ?

Cette question amène l'idée d'ordre. Les enfants passent sans difficulté de la manipulation des éléments à la désignation de leur nombre.

Nous avons trouvé :

	
4	0
0	16
3	4
1	12

Question : Essayons d'inscrire, dans un autre ordre, ce qui a été trouvé. Pouvons-nous obtenir quelque chose de mieux ordonné ?

		
4	0	
3	4	← 2
1	12	
0	16	8

La mise en ordre du tableau suggère aux enfants la réponse manquante. Une vérification par manipulation en apporte la confirmation.

A partir d'exercices de ce type, des observations plus détaillées pourront être effectuées lorsque les enfants seront en mesure de travailler sur le nombre des éléments entrant en jeu, sans le support direct du matériel.

Exemple : Comparaison à propos de règles différentes

REGLE A	REGLE B	REGLE C
1  ↔ 3 	1  ↔ 4 	1  ↔ 5 
1  ↔ 3 	1  ↔ 4 	1  ↔ 5 
1  vaut :	1  vaut :	1  vaut :
 	 	 
3 0	4 0	5 0
2 3	3 4	4 5
1 6	2 8	3 10
9	1 12	2 15
	16	1 20
		25

Question : - Pourra-t-on, à l'avance, prévoir le nombre des réponses si la règle est 1 contre 6 ; 1 contre 7 ; 1 contre 10 ?

Les exercices présentés ci-dessus peuvent être réalisés concrètement par la manipulation de toutes sortes de matériels : objets quelconques, formes diverses découpées dans du carton, jetons de couleurs différentes, blocs multibases, réglettes Cuisenaire, etc.. Ce qui importe, c'est que l'enfant comprenne que l'équivalence est déterminée par une décision arbitraire, par une convention, par une règle du jeu adoptée pour un moment.

La réalisation de la même série d'exercices par des groupes d'élèves utilisant chacun un matériel différent constitue une manière de faire intéressante. Elle permet, au moment de la discussion générale, de comparer les travaux de chaque groupe et de dégager les règles générales d'une manière plus sûre.

Il convient de veiller à ce que la situation perceptive n'amène pas l'enfant à une sorte de conditionnement. On évitera, par exemple, que l'élément ayant la valeur la plus haute soit toujours le plus grand de la collection.

La notion de mesure, et plus particulièrement la mesure des surfaces, donnera l'occasion d'effectuer des exercices d'échanges intéressants.

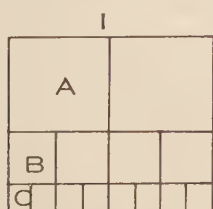
16.3 La construction du nombre à virgule

L'approche du nombre à virgule constitue un prolongement direct des activités numériques en différentes bases et des jeux sur les échanges. La notion de virgule est étroitement liée à l'idée de mesure. Il s'agit donc de faire prendre conscience à l'enfant que, dans toute mesure, le choix de l'unité est effectué de manière arbitraire et résulte d'une convention. Dans cette perspective, la virgule apparaît comme un instrument de codage particulier permettant de désigner l'unité de mesure initiale.

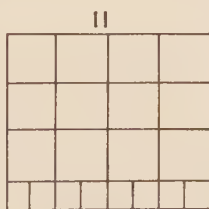
Prenons un exemple dans le système décimal ; la même mesure de longueur peut s'exprimer, selon l'unité choisie :

en m	1,245
en dm	12,45
en cm	124,5
en mm	1245

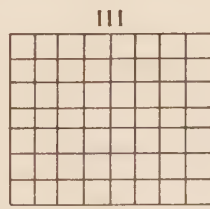
Dans le même esprit, la mesure d'une surface peut s'effectuer au moyen d'unités de mesure carrées.



A	B	C
2	4	8



A	B	C
12	8	



A	B	C
		56

Par un échange permettant d'obtenir le moins de pièces possible, chaque figure équivaut à 3A et 2B.

Le choix d'une unité de mesure arbitraire permet différents types d'écriture.

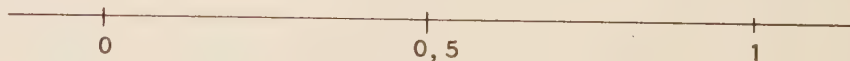
	A	B	C	
L'unité choisie est :	A	3,	2	0
	B	3	2,	0
	C	3	2	0
1/4 de	C	3	2	0 0
le quadruple de	A	0,	3	2 0
etc..				

Jusqu'ici, la virgule n'apporte pas autre chose qu'une manière différente de coder les nombres entiers. On pourrait très bien imaginer que, dans toute mesure, l'unité choisie soit toujours la plus petite possible, ce qui supprimerait la nécessité d'utiliser une virgule.

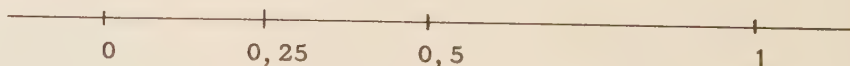
Les premières séries de recherches et d'exercices auront pour objectif l'assimilation de ce nouveau type de codage et la compréhension de son caractère arbitraire.

Cependant, nous ne pouvons nous limiter à ce seul aspect du nombre à virgule qui doit aussi être envisagé dans la perspective d'une approche des nombres réels. Un exemple permettra de mieux préciser les choses : la désignation des points d'une ligne.

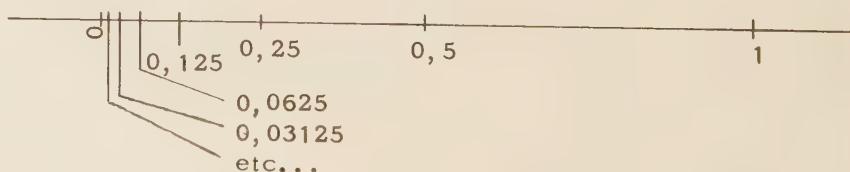
Appelons 0 et 1 les deux extrémités d'un segment de droite. En base dix, le point médian se notera 0,5.

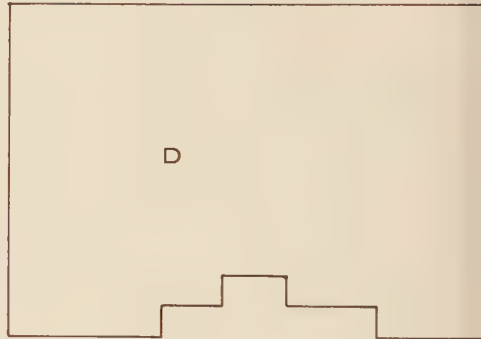
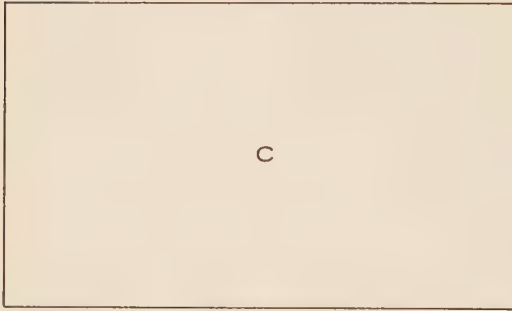
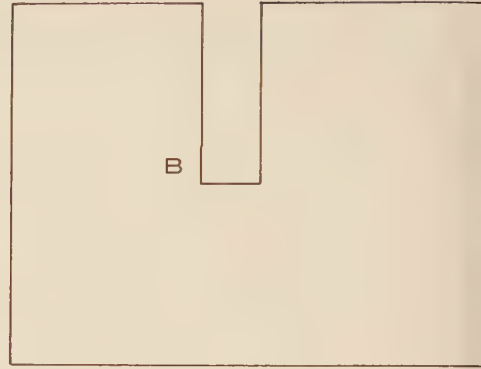


Plaçons un nouveau point médian entre 0 et 0,5.



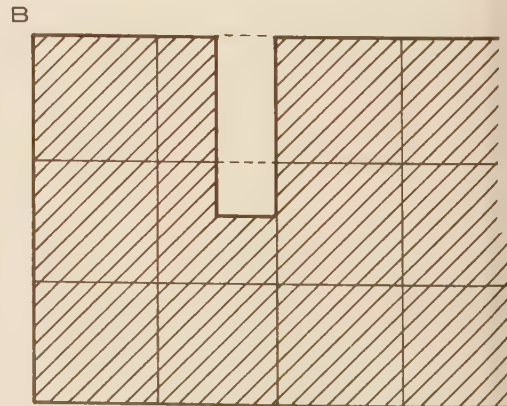
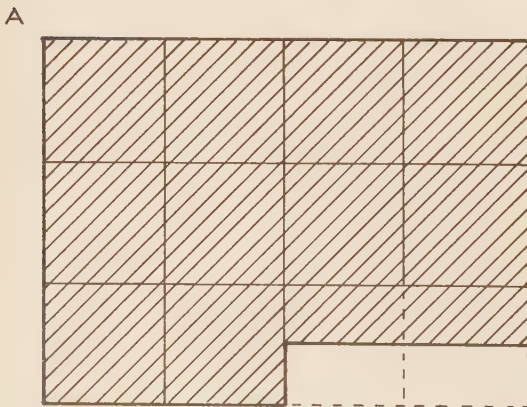
Répétons plusieurs fois cette opération.

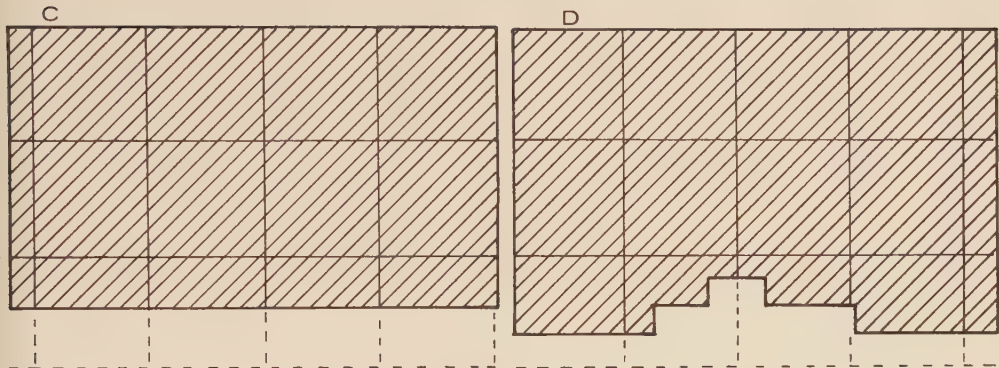




On commence par faire évaluer la dimension des figures. Sans mesurer, laquelle semble la plus grande, la plus petite ?

Après avoir constaté la difficulté de donner une réponse à cette question, on propose aux enfants de mesurer ces figures, par excès et par défaut, au moyen des unités T.





L'aire de A	vaut plus de 10 T	mais moins de 12 T
B	10 T	12 T
C	8 T	15 T
D	8 T	15 T

Autre notation :

$10 T < \text{Aire de A} < 12 T$
$10 T < \text{Aire de B} < 12 T$
$8 T < \text{Aire de C} < 15 T$
$8 T < \text{Aire de D} < 15 T$

Les informations recueillies ne permettent pas encore de déterminer quelle est la figure la plus grande. Les élèves vont utiliser les éléments U pour tenter de préciser la mesure.

Sans difficulté (il sera peut-être utile, pour faciliter la tâche des enfants un peu maladroits de coller les pièces au fur et à mesure), on obtiendra :

Aire de A = 2S; 3T; 0U

Aire de B = 2S; 3T; 1U

B est donc plus grande que A.

Un nouveau problème surgit à propos de C et de D. Les éléments U sont trop grands pour que l'on puisse obtenir une mesure exacte. Dans ces tâtonnements, l'enfant sera amené à découper les unités U en quatre parties égales pour obtenir de nouvelles unités plus petites.

Appelons-les V. On obtient :

$$\begin{aligned} \text{Aire de C} &= 8T; 8U; 10V = 2S; 2T; 2U; 2V \\ \text{Aire de D} &= 8T; 6U; 26V = 2S; 3T; 0U; 2V \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant récapituler l'information obtenue et introduire la virgule pour séparer les pièces que nous avions au départ de celles qui ont été obtenues par découpage.

	S	T	U	V
Aire de A	2	3	0	
Aire de B	2	3	1	
Aire de C	2	2	2,	2
Aire de D	2	3	0,	2

Dans une autre leçon le même travail sera effectué en ne fournissant que les unités S et T. Les élèves devront donc faire plus de découpage et, si les figures sont les mêmes, ils obtiendront :

Aire de A	2	3		
Aire de B	2	3,	1	
Aire de C	2	2,	2	2
Aire de D	2	3,	0	2

La répétition de ce genre d'activité dans des bases diverses permettra de faire bien comprendre le rôle de la virgule.

b) La numérotation d'une liste de mots.

Voici une autre manière de préparer l'idée de nombre à virgule. Le travail commence en leçon collective et peut se poursuivre en activité de groupe ou individuelle.

Une liste de mots, par exemple des noms d'animaux, est inscrite au tableau noir. Il s'agit de les numéroté dans l'ordre alphabétique et selon une certaine base de numération. Choisissons la base trois.

1. aigle
2. baleine
10. canard
11. dromadaire
12. écrevisse
20. lapin
21. marmotte
22. panthère
100. zèbre

On demande ensuite aux enfants de trouver de nouveaux noms d'animaux :

âne, chat, cheval, éléphant.

Comment les intercaler dans la liste sans modifier la numérotation initiale ?

- | | |
|----------------|----------------|
| 1. aigle | |
| 2. baleine | 1, 1 âne |
| 10. canard | |
| | 10, 1 chat |
| | 10, 2 cheval |
| 11. dromadaire | |
| 12. écrevisse | |
| | 12, 1 éléphant |
| 20. lapin | |
| etc... | |

Peut-on trouver d'autres noms d'animaux pour que la numérotation soit régulière :

- | | |
|----------------|----------------|
| 1. aigle | |
| | 1, 1 âne |
| | 1, 2 ... |
| 2. baleine | |
| | 2, 1 ... |
| | 2, 2 ... |
| 10. canard | |
| | 10, 1 chat |
| | 10, 2 cheval |
| 11. dromadaire | |
| | 11, 1 ... |
| | 11, 2 ... |
| 12. écrevisse | |
| | 12, 1 éléphant |
| | 12, 2 ... |
| 20. lapin | |
| | 20, 1 ... |
| etc... | |

Ce système de numérotation permet-il de placer un nom entre chat et cheval ?

- Bien sûr ! 10,11 chaton (ou 10,12)

Reprenons le même jeu en base dix.

1. aigle

1,1 âne
1,2 ânesse
1,3 anguille
1,4 antilope
1,5 ara
1,6 araignée
1,7
1,8
1,9

2. baleine

2,1 baudroie
2,2 béliet
etc...

Est-ce possible d'ajouter à notre liste le mot "bécasse" ?

Il portera le numéro 2,11.

Le mot alouette ? Attention, il sera numéroté 1,01

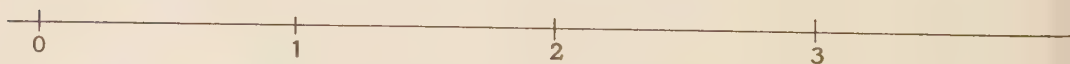
(Une discussion approfondie sera nécessaire pour faire comprendre l'impossibilité d'une autre écriture).

Et le mot abeille ?

(Toute écriture commençant par 0,.... pourra être acceptée).

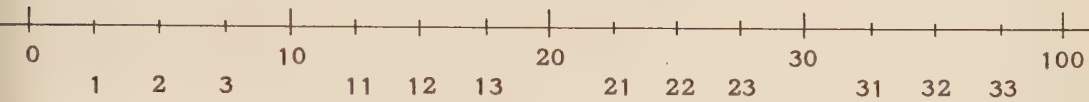
c) Le codage des points d'une ligne.

Prenons, comme point de départ, une ligne dont quelques points sont codés en base quatre.

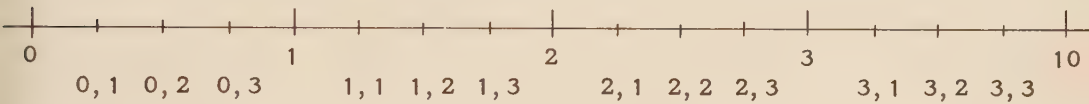


Le segment est divisé en quatre parties égales. Peut-on diviser chacune de ces parties en quatre et coder les nouveaux points ?

Les élèves proposeront peut-être de transformer l'ancienne unité et de la considérer comme un groupement, ce qui constitue une excellente réponse.



On pourra cependant leur faire remarquer que, si le codage est correct, l'unité de base n'est plus la même, d'où la nécessité d'une nouvelle écriture qui permet de conserver cette unité.



A partir de ce codage, l'égalité des notations 1 et 1,0 2 et 2,0 etc., pourra être mise en évidence.

Plusieurs recherches du même type, dans des bases différentes, feront prendre conscience de la relation entre la base de numération et les possibilités de division du segment.

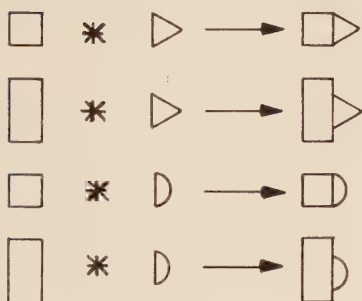
17. LES OPERATIONS

L'enseignement traditionnel ne connaissait guère, en fait d'opérations, que les quatre opérations arithmétiques. Dans le nouvel enseignement de la mathématique, le terme "opération" prend une signification beaucoup plus générale.

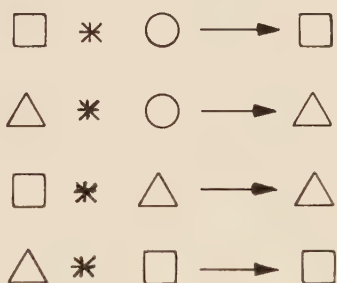
Il y a opération ou loi de composition lorsque, à un couple formé d'un élément appartenant à un ensemble A et d'un élément appartenant à un ensemble B, on fait correspondre selon une certaine règle un élément d'un ensemble C. L'opération est dite interne si les ensembles A, B et C ne forment qu'un.

Exemples :

Opération externe



Opération interne



Avant de développer la notion d'opération, il convient de revenir sur l'ambiguïté déjà relevée entre les termes "opérateur" et "opération". Celle-ci peut donner matière à confusion, lorsque les premiers jeux algébriques sont abordés, si l'on ne prend pas garde de bien situer les deux niveaux d'action. Dans la plupart des manuels, on rencontre des exercices de transformation. Prenons un exemple simple :

Soit un ensemble de quatre éléments : $A =$



Nous pouvons trouver une collection de règles du jeu permettant de transformer un élément de l'ensemble en un autre élément du même ensemble. Puisque l'ensemble comprend quatre éléments, il faut trouver quatre "opérateurs" ou quatre règles :

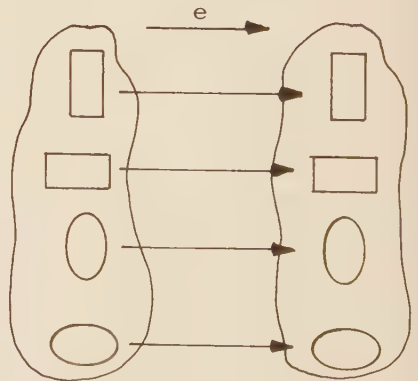
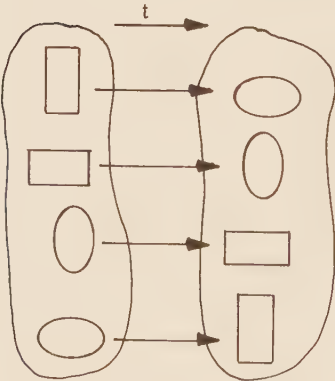
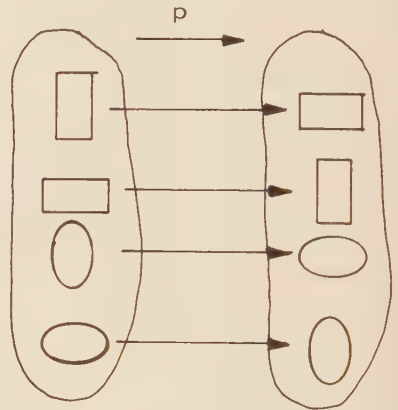
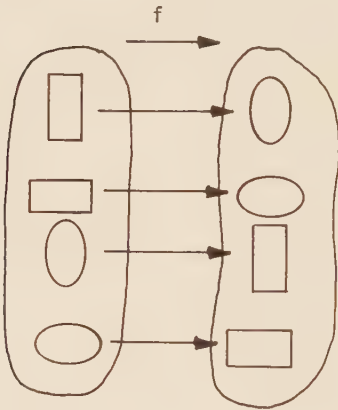
f = "change la forme"

p = "change la position"

t = "change à la fois forme et position"

e = "conserve la même figure"

Vérifions en appliquant chaque opérateur sur l'ensemble.



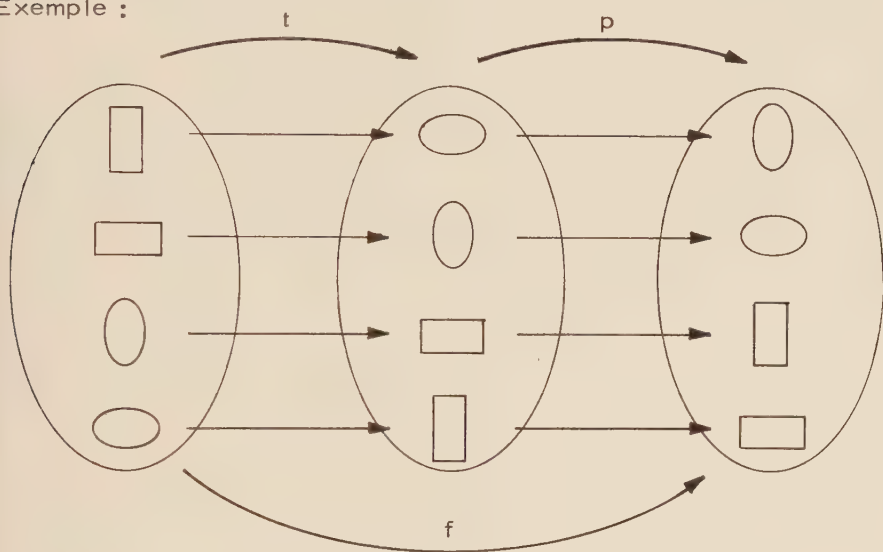
Nous avons donc formé un nouvel ensemble, appelé ensemble d'opérateurs ou ensemble de règles de transformation qui, lui aussi, comprend quatre éléments :

$$B = \{ f, p, t, e \}$$

L'opérateur faisait correspondre un élément de l'ensemble des formes à un autre élément du même ensemble.

L'opération ou la loi de composition, permettra de remplacer l'action successive de deux opérateurs par une seule action.

Exemple :



La composition peut s'écrire : $\langle t ; p \rangle \longrightarrow f$
 ou encore : $t * p = f$

Ecrivons toutes les compositions d'éléments pris deux à deux :

$f * f = e$ $p * f = t$ $t * f = p$ $e * f = f$
 $f * p = t$ $p * p = e$ $t * p = f$ $e * p = p$
 $f * t = p$ $p * t = f$ $t * t = e$ $e * t = t$
 $f * e = f$ $p * e = p$ $t * e = t$ $e * e = e$

Les 16 compositions obtenues peuvent être représentées de manière plus rapide et plus claire dans un tableau de composition :

$\begin{smallmatrix} * \\ \nearrow \end{smallmatrix}$	e	f	p	t
e	e	f	p	t
f	f	e	t	p
p	p	t	e	f
t	t	p	f	e

Nous sommes bien en présence d'une opération interne puisque la combinaison deux à deux de n'importe quelles règles de transformation donne encore l'une des quatre règles de l'ensemble.

Remarquons enfin que l'ensemble des règles de transformation, muni de la loi de composition décrite ci-dessus possède les quatre caractéristiques de ce que l'on appelle une structure de groupe :

Nous venons de constater qu'il s'agit d'une opération interne. Cette opération est associative ($f * p * t = (f * p) * t = f * (p * t)$). Il existe un élément qui ne modifie pas un autre élément, c'est ce qu'on appelle un élément neutre ($f * e = f$; $p * e = p$; $t * e = t$; $e * e = e$). Enfin chaque élément possède un symétrique, la composition d'un élément et de son symétrique donnant l'élément neutre ($f * f = e$; $p * p = e$).

Notons encore que, dans cette situation particulière, l'opération est commutative ($p * f = f * p$) et que chaque élément est son propre symétrique, ce qui n'est pas toujours le cas dans une structure de groupe.

L'extension de l'idée d'opération au-delà des quatre opérations arithmétiques habituelles et l'approche intuitive de la notion de structure constituent l'un des aspects essentiels de la réforme de l'enseignement de la mathématique.

Non seulement cette démarche favorise la compréhension profonde de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division, mais elle constitue une préparation indispensable à l'apprentissage des notions d'algèbre et de géométrie euclidienne.

17.1 L'approche de l'idée d'opération

Il serait difficile d'approfondir la notion d'opération au moyen des seules opérations arithmétiques pour trois raisons au moins. La première réside dans le nombre infini des éléments d'un ensemble numérique. La seconde tient dans le fait que l'addition et la multiplication ne prennent la forme d'une structure de groupe que lorsque l'on dispose respectivement des nombres négatifs et des nombres rationnels ; or, ces notions ne peuvent être présentées à de jeunes enfants. La troisième est liée au fait que, pour analyser le contenu d'une opération, il faut être capable de composer aisément les éléments deux à deux, ce qui signifie que l'étude des propriétés des opérations ari-

thmétiques va de pair avec une mobilité dans le calcul que l'enfant n'atteint guère avant 8 à 9 ans. C'est la raison pour laquelle, à côté des exercices simples portant sur la composition de nombres selon les lois des opérations arithmétiques, seront développées des activités variées, portant sur des ensembles finis, dont les objectifs consisteront en la découverte progressive de la richesse des structures mathématiques.

En deuxième et en troisième années, les activités porteront sur des ensembles restreints permettant des opérations en nombre limité. Autant que possible, les élèves eux-mêmes seront les éléments de base sur lesquels joueront les règles de transformation et nous n'insisterons jamais assez sur le fait que la transformation s'applique sur tous les éléments de l'ensemble de base et non pas sur un seul, pris au hasard. Progressivement, les enfants seront amenés à la découverte d'un système de codage permettant de noter les compositions effectuées, puis à la résolution d'équations et à la réduction de chaînes de transformations.

Illustrons notre propos par quelques exemples :



- a) Quatre élèves sont placés chacun dans une "chambre" rouge ou verte. Ils conviennent d'une règle du jeu déterminant leurs déplacements.
- d) Chaque élève se déplace dans la case d'une autre couleur qui se trouve sur sa droite (il est admis que chaque élève fait face à son vis-à-vis en diagonale).
- g) Chaque élève se déplace dans la case d'une autre couleur qui se trouve sur sa gauche.
- m) Chaque élève se déplace dans l'autre case de même couleur.

La composition de deux mouvements successifs fait apparaître la nécessité d'un élément neutre que nous appellerons r : reste sur place (ou revient dans la même chambre).

Les déplacements correspondant aux équations suivantes :

$$d * d = m$$

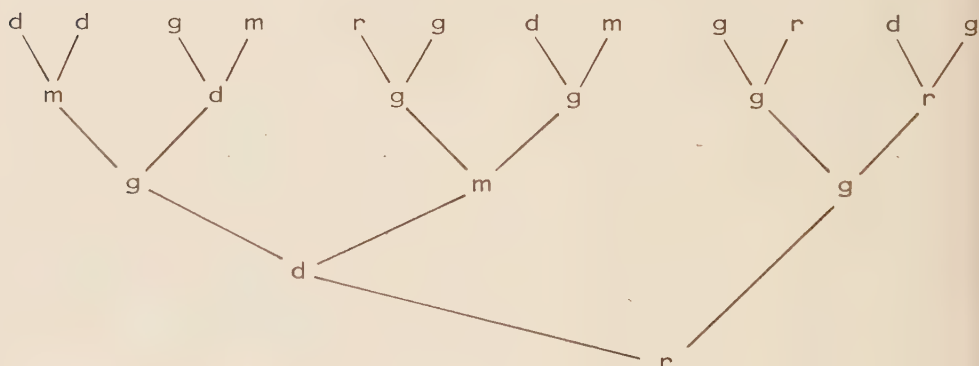
$$d * m = g$$

$$m * m = r$$

$$m * r = m$$

font comprendre à l'enfant que la loi de composition reste vraie, quelle que soit sa position de départ.

L'activité se poursuit par la découverte du fait que toute suite de déplacements peut se réduire à un seul, le même pour chacun des enfants. Tout d'abord, les élèves effectuent les déplacements et codent leur trajet. Dans une seconde étape, le trajet est donné, les élèves cherchent le déplacement qui peut remplacer la chaîne puis vérifient leur réponse en exécutant réellement la succession des mouvements.



L'observation de plusieurs séries et la découverte de la commutativité de la règle conduiront à la découverte d'autres manières de simplifier la chaîne.

Exemple :

$$d g d d g m g g m \equiv d d d g g g g m m \equiv d d d r r \equiv m d \equiv$$

On passera ensuite à la résolution d'équations du type :

$$d * g \equiv \dots$$

$$d * \dots \equiv m$$

$$\dots * m \equiv r$$

$$d * \dots * g \equiv m$$

b) Une nouvelle règle du jeu sera proposée aux enfants.



Par exemple :

- a : chaque enfant se déplace d'une case vers la droite.
- b : chaque enfant se déplace de deux cases vers la droite.
- c : chaque enfant se déplace de trois cases vers la droite.

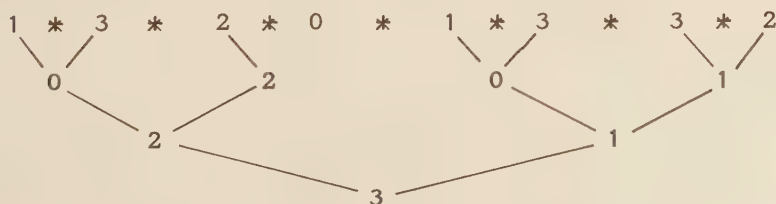
Les élèves découvriront eux-mêmes que la quatrième déplacement peut être nommé r , comme précédemment. La suite de l'exercice pourra être conduite de la même manière.

c) De là, il n'y a qu'un pas à effectuer pour approcher l'idée de classe de reste modulo n . Au lieu d'appeler les déplacements a , b , c et r , nous pouvons les nommer 1, 2, 3 et 0.

Les équations deviendront :

$1 * 0 \equiv 1$	$2 * 0 \equiv 2$	$3 * 0 \equiv 3$
$1 * 1 \equiv 2$	$2 * 1 \equiv 3$	$3 * 1 \equiv 0$
$1 * 2 \equiv 3$	$2 * 2 \equiv 0$	$3 * 2 \equiv 1$
$1 * 3 \equiv 0$	$2 * 3 \equiv 1$	$3 * 3 \equiv 2$

La réduction d'une chaîne sera également possible :



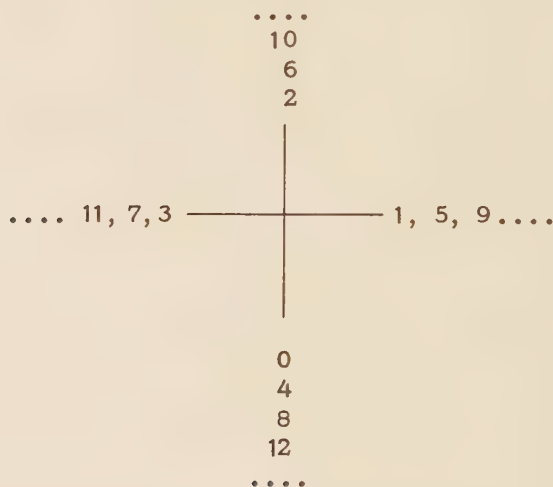
Ou bien

$$1 + 3 + 2 + 0 + 1 + 3 + 3 + 2 = 15$$

$$15 - (3 \times 4) = 3$$

En d'autres termes, la composition de quatre mouvements-unité ramenant au point de départ, on soustrait du nombre obtenu le plus grand multiple de quatre possible.

L'enfant pourra ensuite chercher des nombres différents conduisant au même point d'arrivée.



Le même type d'exercice faisant intervenir trois, cinq, six, ... élèves offrira de nombreuses possibilités de réflexion et d'entraînement au calcul numérique.

d) En quatrième année, le tableau de composition pourra être construit et les élèves seront invités à effectuer des comparaisons.

Reprenons les exemples a, b et c pour dresser les tableaux de composition :

a)

	r	d	m	g
r	r	d	m	g
d	d	m	g	r
m	m	g	r	d
g	g	r	d	m

b)

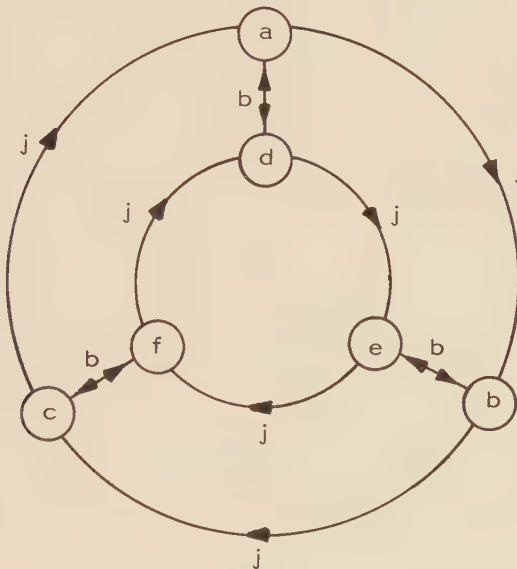
	r	a	b	c
r	r	a	b	c
a	a	b	c	r
b	b	c	r	a
c	c	r	a	b

c)

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

L'examen de ces trois tableaux fait apparaître l'isomorphisme des situations a, b et c. On pourrait en effet remplacer r par 0, d par a ou 1, m par b ou 2 et g par c ou 3, les positions respectives dans le tableau étant les mêmes.

e) En cinquième ou en sixième année, le même jeu peut être poussé à un plus haut degré de complexité. En voici un exemple. Les enfants sont placés sur deux cercles concentriques jaunes reliés par des traits de couleur bleue. Nous ne prendrons, à titre d'exemple, que six élèves, mais on pourrait effectuer la même recherche avec 8 ou 10 positions.



Nous avons vu plus haut que les jeux comportaient quatre positions et qu'il fallait quatre règles de transformation. Puisque nous avons ici six positions, il y aura également six règles. Comment les découvrir ? Imaginons le travail de l'élève placé en c.

Il peut tout d'abord rester sur place (r) ou bien effectuer le tour du cercle extérieur (jjj), ou encore passer par le cercle intérieur (bjjjb), etc...

Pour se rendre en d'autres points, il peut également choisir différents trajets. Nous voyons apparaître ici l'idée de classe d'équivalence qui sera si importante dans de nombreuses situations mathématiques.

On sait, par exemple, que les fractions ordinaires constituent des classes d'équivalence qui sont généralement représentées par leur élément canonique. Ainsi la classe $1/2$, $2/4$, $3/6$, $4/8$, ... est représentée par $1/2$. L'élément canonique de la classe dont font partie $6/9$, $8/12$, $20/30$ sera $2/3$.

Dans l'exercice qui nous occupe, il est possible d'énumérer exhaustivement l'ensemble des éléments constituant une classe d'équivalence.

Nous avons donc six classes soit :

$$\begin{aligned} A &= \{ r; jjj; bb; jbbjj; jbjbj; jbjbj; \dots \} \\ B &= \{ j; bjb; bjjjb; \dots \} \\ C &= \{ jj; bjjb; \dots \} \\ D &= \{ b; jbjj; \dots \} \\ E &= \{ bj; jb; \dots \} \\ F &= \{ bjj; jbj; jjb; \dots \} \end{aligned}$$

Les recherches effectuées par les élèves les amèneront à la constatation que, quel que soit le point de départ, les éléments d'une même classe d'équivalence conduisent au même point d'arrivée. On peut donc choisir un représentant de la classe. Ils découvriront ensuite que la composition de deux éléments pris dans les mêmes classes donne un élément d'une même classe. Pour être plus explicite, un élément quelconque de la classe A, composé avec un élément quelconque de la classe B, conduira au même point d'arrivée qu'un élément de la classe B (Essayons : $jbbjj * bjjjb \equiv j$). Un élément quelconque de la classe C combiné avec un élément quelconque de la classe D conduira au même point qu'un élément de la classe F (Exemple : $bjjb * jbjj \equiv bjj$).

Nous pouvons donc, ici encore, dresser un tableau de composition des éléments de deux classes d'équivalence.

	A	B	C	D	E	F
A	A	B	C	D	E	F
B	B	C	A	E	F	D
C	C	A	B	F	D	E
D	D	E	F	A	B	C
E	E	F	D	B	C	A
F	F	D	E	C	A	B

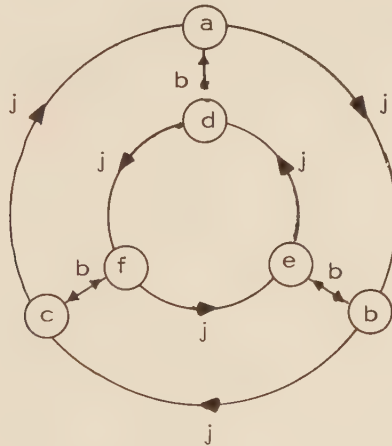
On remarque encore une fois que l'opération définit une structure de groupe. Elle est interne. A représente l'élément neutre. Chaque élément possède un symétrique ($A * A = A$; $B * C = A$; $C * B = A$; $D * D = A$; $E * F = A$; $F * E = A$).

Enfin, il est aisé de montrer que l'opération est associative.

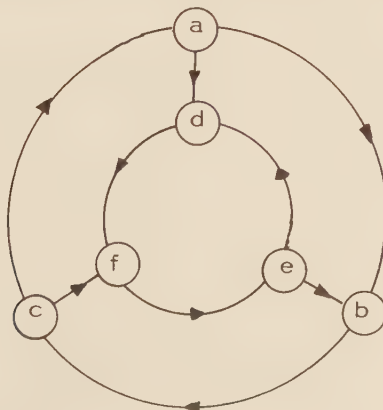
Exemple : $B * C * F = (B * C) * F = A * F = F$
 $B * C * F = B * (C * F) = B * E = F$

De plus, cette opération est commutative.

Le maître pourra ensuite proposer aux élèves de vérifier si la situation est la même lorsque le sens de rotation d'un des cercles est inversé.



On pourra aussi se demander si le jeu constitue encore une structure de groupe lorsque les chemins b ne permettent pas le double sens.



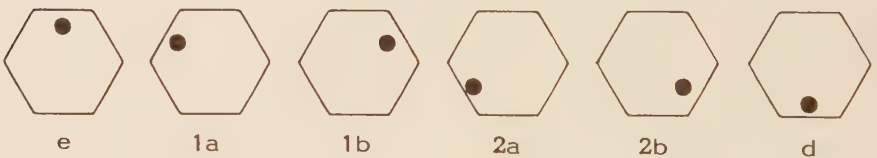
Ces exercices pourraient sembler gratuits. En réalité, ils demandent de la part de l'élève un effort d'analyse extrêmement poussé et un grand pouvoir de concentration. A ce titre, ils constituent de véritables problèmes, la solution n'étant pas, comme c'est trop souvent le cas, contenue presque explicitement dans l'énoncé. On trouvera, dans un petit ouvrage de N. Picard, d'autres exercices du même type fort intéressants. (68)

Remarquons encore que des exercices du même type interviendront dans l'étude des figures géométriques.

Avant de passer aux opérations arithmétiques, nous formulerons quelques remarques qui feront la transition entre les opérations sur données non numériques et celles sur données numériques.

Constatons tout d'abord que l'addition intervenant sur l'ensemble des nombres relatifs forme une structure de groupe. Celle-ci pourra être mise en évidence en cinquième année, lorsque les élèves aborderont les nombres négatifs.

Nous pourrions, par exemple, étudier les rotations d'un hexagone sur lui-même en envisageant les deux sens de rotation.



- | | | | | | |
|---|---|----------------|----|---|--|
| e | = | élément neutre | 1a | = | $1/6$ de tour (sens inverse des aiguilles d'une montre). |
| d | = | demi-tour | 2a | = | $1/3$ de tour (sens inverse des aiguilles d'une montre). |
| | | | 1b | = | $1/6$ de tour (sens des aiguilles d'une montre). |
| | | | 2b | = | $1/3$ de tour (sens des aiguilles d'une montre). |

Le tableau de composition s'établit comme suit :

↙	2a	1a	e	1b	2b	d
2a	2b	d	2a	1a	e	1b
1a	d	2a	1a	e	1b	2b
e	2a	1a	e	1b	2b	d
1b	1a	e	1b	2b	d	2a
2b	e	1b	2b	d	2a	1a
d	1b	2b	d	2a	1a	e

L'opération est interne. Elle possède un élément neutre : e.

Chaque élément a un symétrique ($2a * 2b = e$; $1a * 1b = e$; etc..)

L'opération est associative ($(2b * d) * 1a = 2b * (d * 1a)$)

Elaborons maintenant un tableau partiel de l'addition dans $\mathbb{Z}$.

↙	-2	-1	0	+1	+2	+3
-2	-4	-3	-2	-1	0	+1
-1	-3	-2	-1	0	+1	+2
0	-2	-1	0	+1	+2	+3
+1	-1	0	+1	+2	+3	+4
+2	0	+1	+2	+3	+4	+5
+3	+1	+2	+3	+4	+5	+6

Si l'on fait abstraction des cases hachurées, les deux tableaux ci-dessus présentent une certaine ressemblance et nous pourrions établir le "dictionnaire" suivant :

$$2a = -2$$

$$1b = +1$$

$$1a = -1$$

$$2b = +2$$

$$e = 0$$

$$d = +3$$

La différence entre les deux tableaux tient dans le fait que les rotations de l'hexagone constituent un ensemble fini tandis que l'addition s'applique sur un ensemble infini.

En revanche, nous aurons une structure isomorphe entre les rotations de l'hexagone et l'addition dans les classes de reste modulo 6. En voici la preuve :

$\begin{smallmatrix} + \\ \nearrow \end{smallmatrix}$	$\overset{\cdot}{0}$	$\overset{\cdot}{1}$	$\overset{\cdot}{2}$	$\overset{\cdot}{3}$	$\overset{\cdot}{4}$	$\overset{\cdot}{5}$
$\overset{\cdot}{0}$	0	1	2	3	4	5
$\overset{\cdot}{1}$	1	2	3	4	5	0
$\overset{\cdot}{2}$	2	3	4	5	0	1
$\overset{\cdot}{3}$	3	4	5	0	1	2
$\overset{\cdot}{4}$	4	5	0	1	2	3
$\overset{\cdot}{5}$	5	0	1	2	3	4

Ici le "dictionnaire" sera :

$$\begin{aligned} 2a &= \overset{\cdot}{4} \\ 1a &= \overset{\cdot}{5} \\ e &= \overset{\cdot}{0} \\ 1b &= \overset{\cdot}{1} \\ 2b &= \overset{\cdot}{2} \\ d &= \overset{\cdot}{3} \end{aligned}$$

Il suffirait de modifier l'ordre des éléments de l'un des deux tableaux pour s'en convaincre.

Notre dernier exemple concernera la mise en évidence du rôle respectif du zéro et du un dans la multiplication. Nous prendrons pour cela un matériel formé de quatre feuilles transparentes (découpées dans des fourres pour documents que l'on trouve dans le commerce) jaune, bleue, verte et incolore.

Les élèves chercheront toutes les manières de les superposer deux à deux :

$$I * V = V \quad J * B = V \quad V * J = V \text{ etc...}$$

Ils établiront ensuite un tableau de composition des couleurs :

	V	I	J	B
V	V	V	V	V
I	V	I	J	B
J	V	J	J	V
B	V	B	V	B

Dans cette activité, nous découvrons ce qu'est un élément absorbant. En effet, la composition de la feuille verte avec n'importe quelle autre feuille donne toujours le vert.

Comparons avec le début d'une table de multiplication dans laquelle figure le zéro :

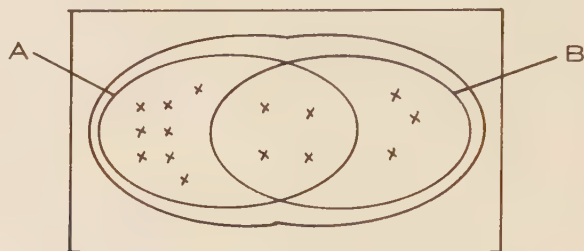
	0	1	2	3	
0	0	0	0	0	
1	0	1	2	3	
2	0	2	4	6	
3	0	3	6	9	

17.2 Les opérations arithmétiques

Il arrive parfois que l'on entende dire que, les mathématiques modernes ayant remplacé l'arithmétique traditionnelle, les élèves n'apprennent plus à calculer mentalement ni à résoudre les opérations arithmétiques. Rien n'est plus faux. Il ne fait aucun doute que ces notions continuent à être indispensables. C'est donc dans la manière de les aborder et de les faire comprendre à l'enfant que nous trouverons la différence entre l'enseignement rénové et l'enseignement traditionnel.

Selon le plan adopté pour l'ensemble de cette esquisse de méthodologie nous ne nous attarderons pas aux problèmes de la construction du nombre et nous aborderons directement la notion d'addition, telle qu'elle peut être travaillée avec des élèves de 7 à 8 ans.

Rappelons cependant comment l'addition est liée à la notion d'ensemble.



Soit deux ensembles. Le cardinal de A est 12.

Le cardinal de B est 7.

Le cardinal de la réunion des ensembles A et B s'obtient de la manière suivante :

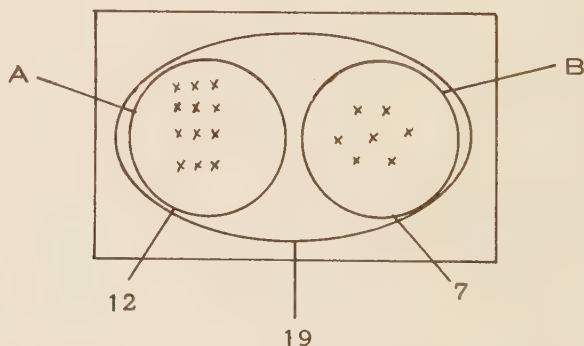
$$\text{Card}_A + \text{Card}_B - \text{Card}_{A \cap B} = \text{Card}_{A \cup B}$$

Dans notre exemple :

$$12 + 7 - 4 = 15$$

Il est bien évident que cette démarche n'est pas accessible à de jeunes enfants et que l'activité d'addition s'exercera sur des ensembles disjoints par souci de simplification.

Exemple :

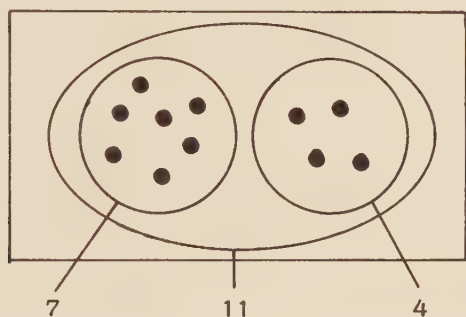


Sans entrer dans les détails, il faut relever que l'enseignement traditionnel a longuement joué sur le caractère dynamique de l'addition ou de la soustraction :

- J'avais 5 poupées, j'en achète encore 2
- Maman avait acheté 12 oeufs elle en a cassé 3 ...
- etc..

Or il semble bien que l'addition soit assimilée au moment où, l'enfant ayant acquis un niveau de réversibilité suffisant, l'opération peut être considérée d'un point de vue statique. Une fois de plus, le codage jouera un rôle important dans la description d'une situation donnée.

Par exemple, l'enfant ayant manipulé des objets, établit une représentation de ce qu'il a posé sur la table.



Sur la base de cette représentation il pourra coder, c'est-à-dire écrire les équations suivantes :

$$7 + 4 = 11$$

$$4 + 7 = 11$$

$$11 = 7 + 4$$

$$11 = 4 + 7$$

$$11 - 4 = 7$$

$$11 - 7 = 4$$

$$7 = 11 - 4$$

$$4 = 11 - 7$$

Dans un second temps seulement, chacune de ces équations pourra prendre un habillage tiré de situations de la vie quotidienne mais l'important réside dans le fait que l'enfant est capable d'assimiler que, à un couple de nombres, il est possible de faire correspondre un nombre.

$$\begin{array}{lcl}
 7 ; 4 & \longrightarrow & 7 + 4 \longleftarrow \text{---} \longrightarrow 11 \\
 4 ; 7 & \longrightarrow & 4 + 7 \longleftarrow \text{---} \longrightarrow 11 \\
 11 ; 7 & \longrightarrow & 11 - 7 \longleftarrow \text{---} \longrightarrow 4 \\
 7 ; 11 & \longrightarrow & 7 - 11 \longleftarrow \text{---} \longrightarrow ?
 \end{array}$$

La première série de flèches représente l'opération addition ou soustraction. La seconde série associe, par un cas trivial d'isomorphisme, deux symboles représentant un même nombre. Cette représentation met en évidence la commutativité de l'addition et la non-commutativité de la soustraction.

Lorsque les élèves se seront partiellement dégagés du recours à la manipulation d'un matériel concret, les observations porteront sur la construction de tableaux de nombres dans lesquels les enfants peuvent observer des choses intéressantes.

Exemples :

Comparaison d'un tableau d'addition et d'un tableau de soustraction.

$+$ ↗	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	6
3	3	4	5	6	7
4	4	5	6	7	8

$-$ ↗	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1		0	1	2	3
2			0	1	2
3				0	1
4					0

Comparaison de deux tableaux d'addition.

$+$ ↗	10	11	12	13
9	19	20	21	22
10	20	21	22	23
11	21	22	23	24
12	22	23	24	25

$+$ ↗	100	110	120	130
90	190	200	210	220
100	200	210	220	230
110	210	220	230	240
120	220	230	240	250

Comparaison de deux tableaux de soustraction.

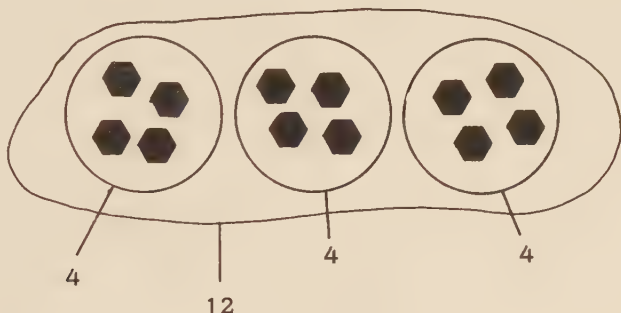
$-$ ↗	18	20	22	24
18	0	2	4	6
19		1	3	5
20		0	2	4
21			1	3

$-$ ↗	23	25	27	29
23	0	2	4	6
24		1	3	5
25		0	2	4
26			1	3

On constate immédiatement combien la richesse des observations et des comparaisons tiendra dans l'attitude du maître intervenant avec toute la finesse désirable pour susciter une exploration en profondeur tout en conservant à cette exploration le caractère spontané qui donnera aux élèves le sentiment d'avoir effectué une véritable recherche -

La multiplication est souvent abordée à partir de la réunion d'ensembles ayant même cardinal, comme une simple extension de l'addition.

Exemple :



$$4 + 4 + 4 = 12$$

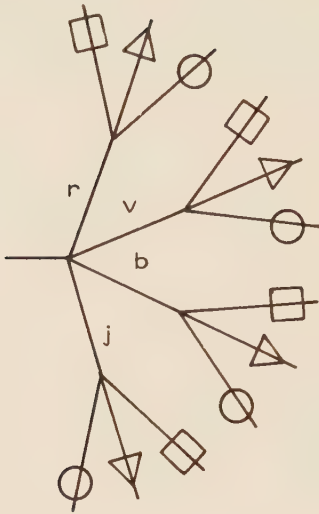
$$3 \times 4 = 12$$

Cette manière de faire offre peu d'intérêt car il ne s'agit pas, en fait, d'une véritable multiplication. En outre, elle présente un certain danger dans le mesure où elle conduit trop vite l'enfant à des situations ambiguës du type bien connu : Est-ce que "3 paniers de 4 pommes" est la même chose que "4 paniers de 3 pommes" ?

La traduction incorrecte dans le langage ensembliste "3 ensembles de 4 éléments = 4 ensembles de 3 éléments" a été trop souvent rencontrée pour que nous n'adoptions pas une présentation directement liée au produit cartésien, quitte à retarder quelque peu l'introduction de la notion.

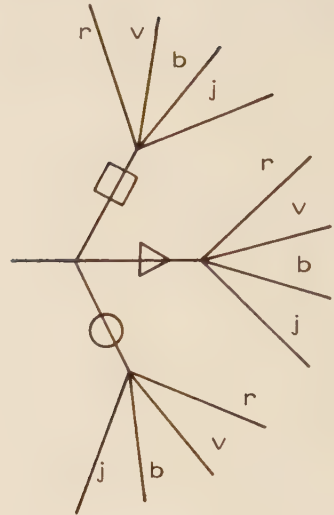
Les élèves ayant travaillé tant le tableau à double entrée que l'arbre de classement aborderont sans mal une présentation de la multiplication liée à ces représentations.

Exemples : 4 couleurs - 3 formes



	r	v	b	j
□				
△				
○				

$$4 \times 3 = 12$$



	□	△	○
r			
v			
b			
j			

$$3 \times 4 = 12$$

La notion de multiplication sera consolidée par des recherches donnant la possibilité d'une large exploration.

Exemple : On dispose de 4 formes au plus et de 3 couleurs au plus.
Trouver tous les tableaux cartésiens pouvant être construits.

une forme
une couleur



trois formes
une couleur



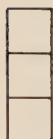
une forme
deux couleurs



trois formes
deux couleurs



une forme
trois couleurs



trois formes
trois couleurs



deux formes
une couleur



quatre formes
une couleur



deux formes
deux couleurs



quatre formes
deux couleurs



deux formes
trois couleurs



quatre formes
trois couleurs



L'extension de ce genre d'exercice à des constructions en trois dimensions donnera l'occasion d'aborder sous un autre aspect les propriétés de la multiplication déjà approchées dans le chapitre sur les relations.

Quant à la division, elle s'inscrira tout naturellement dans ce cadre au moyen de problèmes inverses.

Exemples : On possède du papier de 3 couleurs différentes.
Combien faut-il choisir de formes différentes pour
obtenir 18 figures dont aucune ne soit exactement
semblable à une autre ?

Il convient, à propos de la division, d'effectuer encore une distinction. La présentation de la division comme opération inverse de la multiplication ne recouvre, tant que l'on s'en tient à l'ensemble des nombres naturels, qu'une partie des cas possibles.

L'introduction, en quatrième année, de la notion de division euclidienne, permettra des développements intéressants et conduira, en cinquième surtout, à des activités portant sur les classes de reste modulo n .

Prenons encore un exemple en choisissant la division par cinq. Nous pouvons retenir l'ensemble des couples de nombres tels que, lorsqu'on multiplie le composé de ce couple, on retrouve le premier membre du couple soit plus simplement dit :

$$\begin{array}{llllll}
 < 15 ; 5 > \longrightarrow & 15 : 5 & \longleftrightarrow & 3 & 3 \times 5 = 15 \\
 < 20 ; 5 > \longrightarrow & 20 : 5 & \longleftrightarrow & 4 & 4 \times 5 = 20 \\
 < 25 ; 5 > \longrightarrow & 25 : 5 & \longleftrightarrow & 5 & 5 \times 5 = 25
 \end{array}$$

Mais nous pouvons effectuer le même travail en admettant l'existence d'un reste et en utilisant un nouveau symbole.

$$\begin{array}{llllll}
 < 15 ; 5 > \longrightarrow & 15 \div 5 & \longleftrightarrow & 3 & 3 \times 5 = 15 \\
 < 16 ; 5 > \longrightarrow & 16 \div 5 & \longleftrightarrow & 3 \text{ r. } 1 \\
 < 17 ; 5 > \longrightarrow & 17 \div 5 & \longleftrightarrow & 3 \text{ r. } 2 \\
 < 18 ; 5 > \longrightarrow & 18 \div 5 & \longleftrightarrow & 3 \text{ r. } 3 \\
 < 19 ; 5 > \longrightarrow & 19 \div 5 & \longleftrightarrow & 3 \text{ r. } 4 \\
 < 20 ; 5 > \longrightarrow & 20 \div 5 & \longleftrightarrow & 4 & 4 \times 5 = 20 \\
 < 21 ; 5 > \longrightarrow & 21 \div 5 & \longleftrightarrow & 4 \text{ r. } 1
 \end{array}$$

Cette manière de faire donne donc la possibilité d'effectuer une partition de l'ensemble des nombres entiers en fonction du reste obtenu lorsque le nombre est divisé par cinq. C'est ce qu'on appelle les classes de reste modulo 5.

Reste

0	1	2	3	4
0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	..	..	..

En nous appuyant sur la notion de structure, nous pourrions faire apparaître la loi de composition de deux classes de reste.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Lorsqu'on additionne deux nombres, le reste de la somme divisée par 5 est égal à la somme des restes des deux nombres divisée par 5.

Exemple : $\left. \begin{array}{l} 12 : 5 \text{ reste } 2 \\ 17 : 5 \text{ reste } 2 \end{array} \right\} 4$ $29 : 5 \text{ reste } 4$

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

De même, le produit des restes de deux nombres divisé par cinq est égal au reste du produit des deux nombres lorsqu'il est divisé par cinq.

Exemple : $\left. \begin{array}{l} 17 : 5 \text{ reste } 2 \\ 24 : 5 \text{ reste } 4 \end{array} \right\}$ $8 : 5 \text{ reste } 3$

$(17 \times 24) : 5$
 $408 : 5 \text{ reste } 3$

On voit immédiatement tout le parti qui peut être tiré de ces exercices pour l'étude des caractères de divisibilité des nombres ainsi que pour l'apprentissage de la technique de la division.

Le lecteur trouvera probablement que nous avons passé bien rapidement sur la question si importante de la construction des opérations arithmétiques. Nous nous en justifions par trois raisons. En premier lieu, la plupart des activités proposées dans les autres chapitres de cette esquisse de méthodologie offrent des occasions nombreuses de développer les opérations sur les nombres. En second

lieu, le cadre forcément limité dont nous disposons ne permet pas de passer en revue tous les aspects de ce problème. En troisième lieu, et c'est là que réside la raison essentielle, l'introduction des notions d'ensembles et de relations ainsi que le changement dans les méthodes d'enseignement jouent sur l'apprentissage des opérations arithmétiques un rôle dont nous pressentons l'importance mais dont tous les aspects sont loin d'être élucidés. Des études approfondies portant sur ce seul sujet seront encore nécessaires.

17.3 La technique des opérations arithmétiques

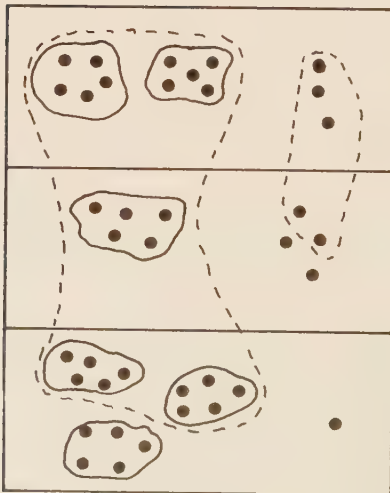
Bien que ce sujet n'intéresse que très modérément le mathématicien et qu'il n'offre guère de perspectives sur le plan général du développement de la pensée, il faut, pour des raisons sociales évidentes, que les élèves apprennent à résoudre des opérations arithmétiques portant sur de grands nombres.

L'addition et la soustraction seront abordées successivement par les groupements en différentes bases et par les exercices d'échanges.

Exemples :

a) Addition

Groupements :

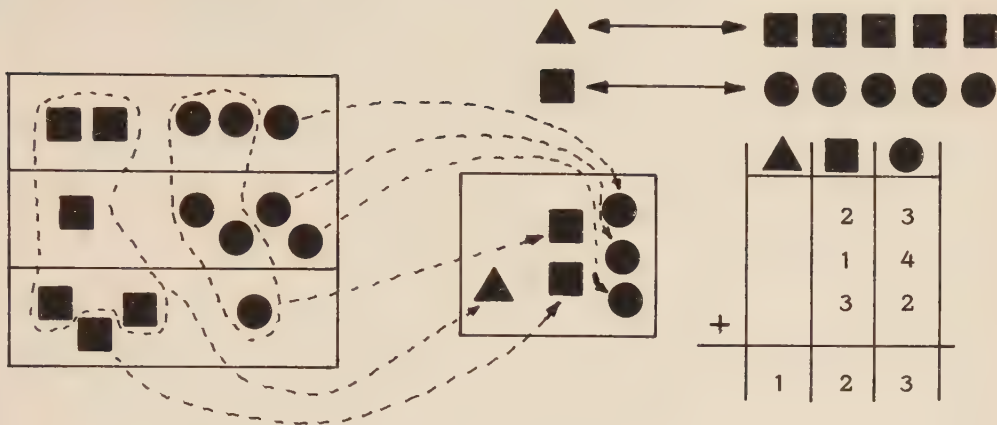


Base cinq

		2	3
		1	4
		3	1
+			
	1	2	3

Echanges :

Règle d'échange :



ou bien

Règle d'échange :

$$1 P \equiv 5 S$$

$$1 S \equiv 5 T$$

Voici trois collections :

1. 2S, 3T

2. 1S, 4T

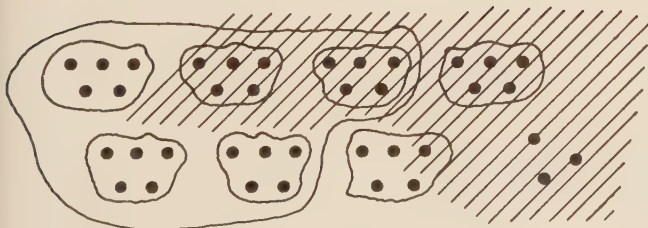
3. 3S, 1T

Trouver une collection équivalente à la somme des trois précédentes qui comprenne le moins de lettres possible :

	P	S	T
		2	3
		1	4
+		3	1
	1	2	3

b) Soustraction

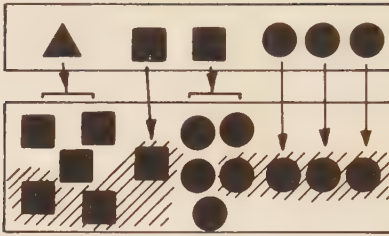
Groupements à défaire :



Base cinq

	1	2	3
		3	4
-		3	4

Echanges :

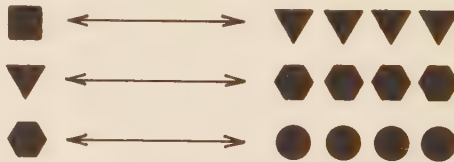


	▲	■	●
	1	2	3
-		3	4
		3	4

Il convient de noter que la soustraction par les échanges figure déjà au programme de troisième année. Cependant, il s'avère que la plupart des élèves de ce degré n'ont pas encore une compréhension suffisante de la notion d'échange pour en tirer parti. Il faut donc reprendre ce type d'exercice aussi bien en cinquième qu'en quatrième année afin de consolider la maîtrise de la soustraction.

L'une des approches de la multiplication en tant que mécanisme peut être l'addition, avec échanges, de collections composées des mêmes éléments.

Prenons, par exemple la règle d'échange :



La collection constituée est



Nous la prenons :

Eléments de chaque sorte :



Collection réduite au nombre minimum d'éléments :



	Deux fois	Quatre fois	Six fois	Huit fois
Eléments de chaque sorte :	2 4	4 8	6 12	8 16
Collection réduite au nombre minimum d'éléments :	3 0 **	1 2 0 *	2 1 0	3 0 0 **

Par une observation bien conduite, l'enfant sera amené à comparer les résultats marqués d'un ou de deux astérisques.

Cette recherche, qui exige une intense activité de calcul, sera de préférence effectuée par des groupes d'élèves travaillant sur des données de départ différentes.

La confrontation des résultats obtenus permettra peu à peu une prise de conscience de ce qui se passe lorsqu'on multiplie un nombre quelconque :

- a) par la base;
- b) par un multiple de la base;
- c) par une puissance de la base.

ainsi :

En base quatre : quatre s'écrit 1 0
huit " 2 0

donc :

1 3 2	1 3 2	1 3 2
x 1 0	x 2	x 2 0
1 3 2 0	3 3 0	3 3 0 0

En base cinq : cinq s'écrit 1 0
dix " 2 0

donc :

1 3 2	1 3 2	1 3 2
x 1 0	x 2	x 2 0
1 3 2 0	3 1 4	3 1 4 0

En base trois : trois s'écrit 1 0
six " 2 0
neuf " 1 0 0

donc :

2 0 2	2 0 2	2 0 2	2 0 2
x 1 0	x 2	x 2 0	x 1 0 0
2 0 2 0	1 1 1 1	1 1 1 1 0	2 0 2 0 0

En base dix : dix s'écrit 1 0
cent " 1 0 0
mille " 1 0 0 0

donc :

1 3 2	1 3 2	1 3 2
x 1 0	x 1 0 0	x 1 0 0 0
1 3 2 0	1 3 2 0 0	1 3 2 0 0 0

En base quatre : six s'écrit 12

Six fois $132 =$ Quatre fois $132 +$ deux fois 132

$$\begin{array}{r} 132 \\ \times 10 \\ \hline 1320 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 132 \\ \times 2 \\ \hline 330 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 132 \\ \times 12 \\ \hline 330 \\ (+) 1320 \\ \hline 2310 \end{array}$$

En base dix : douze s'écrit 12

Douze fois $132 =$ Dix fois $132 +$ deux fois 132

$$\begin{array}{r} 132 \\ \times 10 \\ \hline 1320 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 132 \\ \times 2 \\ \hline 264 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 132 \\ \times 12 \\ \hline 264 \\ (+) 1320 \\ \hline 1584 \end{array}$$

De nombreux exercices similaires feront découvrir à l'enfant que la règle est valable dans n'importe quelle circonstance.

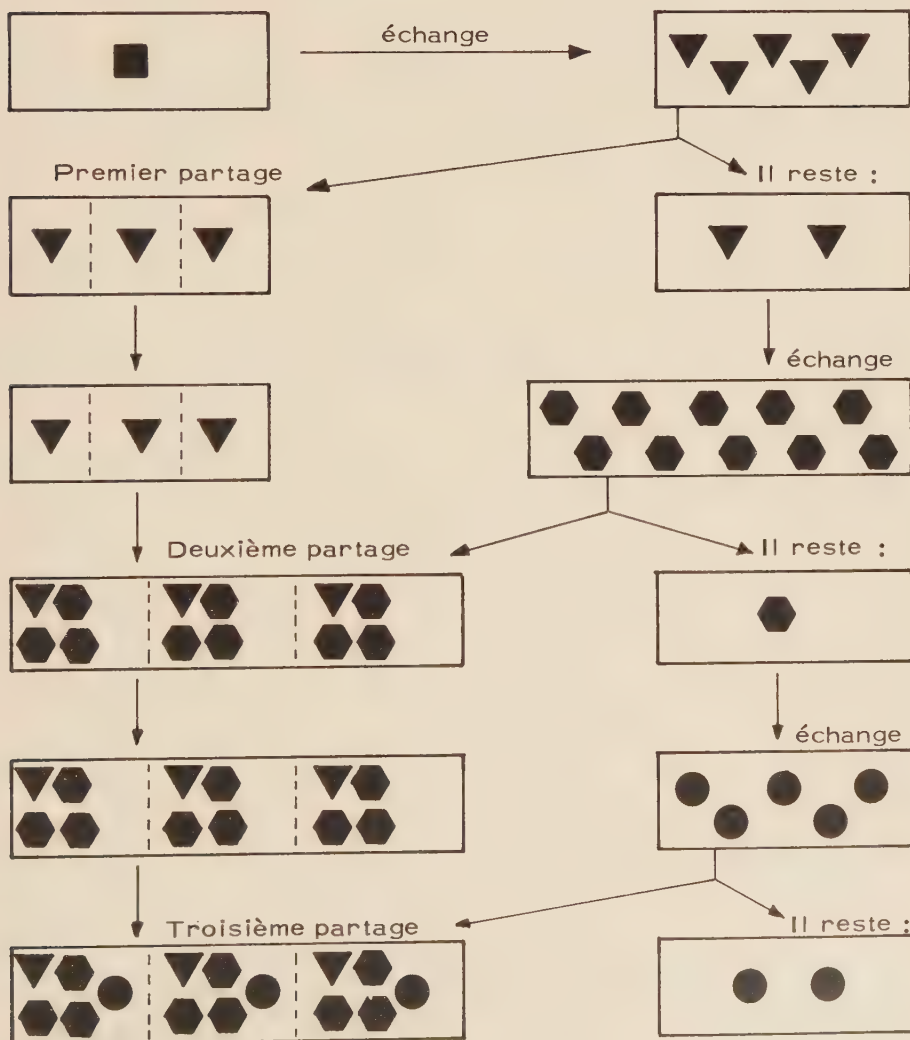
On veillera cependant à ne pas considérer la multiplication dans des bases autres que dix comme un but en soi, mais bien comme un outil destiné à faire mieux comprendre la technique de cette opération en base dix.

La division pourra être préparée de la même manière. Il n'est pas nécessaire d'attendre que la multiplication soit assimilée pour aborder cette opération. Bien au contraire, la division sous forme d'échange travaillée parallèlement à la multiplication permettra une meilleure structuration des deux opérations.

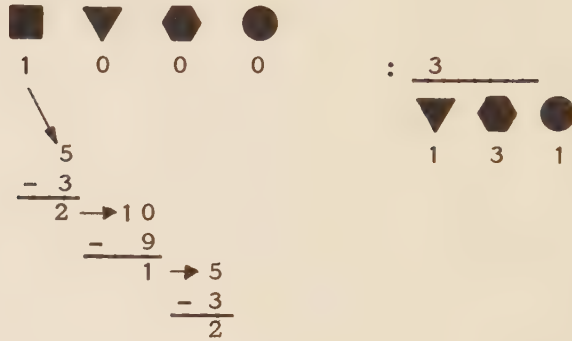
Exemple : Règle d'échange



Comment partager l'équivalent d'un carré en trois parties de même valeur ?



Après la manipulation, on pourra aborder une représentation ; par exemple :



Nous réservons à la base dix une autre approche de la technique des opérations arithmétiques, celle qui consiste à jouer sur les propriétés des opérations.

Prenons tout d'abord la multiplication de deux nombres de deux chiffres :

$$45 \times 23$$

Les élèves peuvent écrire chaque nombre de différentes manières :

exemple :

$$\begin{aligned} 45 &= 10 + 10 + 10 + 10 + 5 \\ 23 &= 10 + 10 + 3 \end{aligned}$$

Les travaux antérieurs dans le domaine du produit cartésien permettent la représentation présentée à la page suivante.

Travaillant par groupes sur du papier quadrillé, les élèves pourront, par comptage, vérifier eux-mêmes l'exactitude de leurs calculs.

	10	10	10	10	5
10	$10 \times 10 = 100$	$10 \times 10 = 100$	$10 \times 10 = 100$	$10 \times 10 = 100$	$5 \times 10 = 50$
10	$10 \times 10 = 100$	$10 \times 10 = 100$	$10 \times 10 = 100$	$10 \times 10 = 100$	$5 \times 10 = 50$
3	$10 \times 3 = 30$	$10 \times 3 = 30$	$10 \times 3 = 30$	$10 \times 3 = 30$	$5 \times 3 = 15$

D'où $45 \times 23 = (8 \times 100) + (2 \times 50) + (4 \times 30) + 15 = 1035$

Après quelques exercices de ce genre, l'enfant cherchera de lui-même des solutions plus économiques.

	40	5
20	$40 \times 20 = 800$	$5 \times 20 = 100$
3	$40 \times 3 = 120$	$5 \times 3 = 15$

$45 \times 23 = 800 + 120 + 100 + 15 = 1035$

L'extension à de plus grands nombres s'effectuera dans le même esprit, multiplions 642 par 235. Cette opération peut s'écrire :

$$(642 \times 200) + (642 \times 30) + (642 \times 5)$$

Mais chaque multiplication peut à son tour être décomposée :

$$(600 \times 200) + (40 \times 200) + (2 \times 200) + (600 \times 30) + (40 \times 30) + (2 \times 30) + (600 \times 5) + (40 \times 5) + (2 \times 5)$$

La mise de ces données dans un tableau à double entrée sera plus claire :

X	600	40	2	
200	120 000	8 000	400	128 400
30	18 000	1 200	60	19 260
5	3 000	200	10	3 210
	141 000	9 400	470	150 870

On retrouvera ces données dans les produits partiels :

$\begin{array}{r} 642 \\ \times 235 \\ \hline 3210 \\ 19260 \\ 128400 \\ \hline 150870 \end{array}$	ou	$\begin{array}{r} 235 \\ \times 642 \\ \hline 470 \\ 9400 \\ 141000 \\ \hline 150870 \end{array}$
---	----	---

Avec la division, les élèves seront invités à faire l'inventaire de ce qu'ils peuvent trouver aisément.

Prenons, à titre d'exemple, $18407 : 431 =$

L'enfant établit un catalogue de ce qu'il sait :

$1 \times 431 = 431$	$10 \times 431 = 4310$
$2 \times 431 = 862$	$20 \times 431 = 8620$
$3 \times 431 = 1293$	$30 \times 431 = 12930$

La division peut commencer :

$$\begin{aligned} 18\ 407 &= (30 \times 431) + (18\ 407 - 12\ 930) \\ &= (30 \times 431) + 5\ 477 \\ &= (30 \times 431) + 10 \times 431 + (5\ 477 - 4\ 310) \\ &= (40 \times 431) + 1\ 167 \\ &= (40 \times 431) + (2 \times 431) + (1\ 167 - 862) \\ &= (42 \times 431) - 305 \end{aligned}$$

Le résultat de la division est donc 42, le reste étant de 305.

Il ne s'agit pas par là de faire apprendre aux élèves une méthode de division plus lente que celle liée à la notion d'échange, mais de leur poser un certain nombre de problèmes sous différentes formes de telle manière que la compréhension profonde de l'opération en soit fortifiée.

17.4 Les opérations sur les nombres à virgule

On sait que, dans l'enseignement traditionnel, le passage des opérations sur les nombres entiers aux opérations sur les nombres à virgule constituait une difficulté considérable. Dans la nouvelle perspective, il ne devrait pas en être de même si le travail sur les groupements en différentes bases et sur les échanges a été bien effectué.

Il s'agit de faire comprendre trois choses à l'enfant :

- a) La notion de virgule est arbitraire; elle dépend du choix de l'unité;
- b) le calcul de l'opération s'effectue comme s'il n'y avait pas de virgule;
- c) la place de la virgule dans le résultat se trouve par approximation et encadrement.

Voici, par exemple, comment le travail peut être abordé à propos de l'addition.

Deux opérations sont données :

$$\begin{array}{r} 3 \\ + 2 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \dots \\ \hline \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ + 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

Les élèves cherchent des nombres qui, dans chaque ligne, soient compris entre les nombres déjà donnés soit, par exemple,

$$\begin{array}{r} 3,5 \\ + 2,5 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,5 \\ + 2,6 \\ \hline 6,1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,5 \\ + 2,2 \\ \hline 5,7 \end{array}$$

Dans chaque cas, la manipulation permet à l'enfant de vérifier, par groupements ou échanges, l'exactitude de sa réponse.

Il peut être intéressant de faire découvrir combien d'opérations différentes pourraient répondre à la consigne en admettant qu'on se limite aux dixièmes.

Puisque nous pouvons choisir de 3,1 à 3,9 pour la première ligne et de 2,1 à 2,9 pour la seconde, il y a donc $9 \times 9 = 81$ réponses possibles. On voit donc l'intérêt qu'offre le même travail dans des bases plus petites que la base dix; celles-ci permettent plus facilement la construction exhaustive de l'ensemble des solutions.

La multiplication d'un nombre à virgule par un nombre entier se traite de la même manière. En revanche, un nouveau problème surgit lorsque le multiplicateur est un nombre à virgule. C'est encore la manipulation et la notion d'échange qui apporteront la solution. Prenons un exemple dans la base quatre.

$$2,2 \times 2,31 \quad \text{soit} \quad 21/2 \times 2 \quad 13/16$$

Effectuons le calcul sans nous préoccuper de la virgule en n'oubliant pas que nous sommes en base quatre.

$$\begin{array}{r}
 2,2 \\
 \times 2,31 \\
 \hline
 22 \\
 1320 \\
 11000 \\
 \hline
 13002
 \end{array}$$

Encadrons le résultat :

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 \times 2 \\
 \hline
 10
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 3 \\
 \times 3 \\
 \hline
 21
 \end{array}$$

la réponse est donc : 13,002

La vérification s'effectuera soit au moyen d'un jeu d'échange soit par un dessin de surface.

Le cas de la division est plus simple que celui de la multiplication. Prenons une règle d'échange en base dix :

$$\begin{array}{lcl}
 1 \blacksquare & \equiv & 10 \blacktriangle \\
 1 \blacktriangle & \equiv & 10 \blacklozenge
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \blacksquare \blacktriangle \blacklozenge \\
 1 \quad 2 \quad 4 \\
 5 \quad 4 \\
 5
 \end{array}
 : \frac{7}{\blacktriangle \blacklozenge}$$

Pour continuer la division, il faut une nouvelle règle d'échange, l'ancienne unité étant désignée par la virgule.

$$\begin{array}{lcl}
 1 \blacklozenge & 10 \bullet & \\
 1 \bullet & 10 \text{---} & \\
 \text{etc..} & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \blacksquare \blacktriangle \blacklozenge \bullet \text{---} \\
 1 \quad 2 \quad 4, 0 \quad 0 \\
 5 \quad 4 \\
 5 \quad 0 \\
 1 \quad 0 \\
 3 \\
 \text{etc..}
 \end{array}
 : \frac{7}{\blacktriangle \blacklozenge \bullet \text{---}}$$

Il ne reste plus qu'à passer à la division par un nombre à virgule.

Nous reviendrons pour cela, à la base dix. Il s'agira de faire découvrir à l'enfant que, lorsque le dividende et le diviseur sont eux-mêmes multipliés ou divisés par un même nombre, le résultat de l'opération ne change pas.

Exemple :

$$24 : 6 = 4$$

$$48 : 12 = 4$$

$$12 : 3 = 4$$

$$6 : 1,5 = 4$$

$$1,2 : 0,3 = 4$$

$$60 : 3 = 20$$

$$30 : 1,5 = 20$$

$$10 : 0,5 = 20$$

On retrouvera ainsi la technique habituelle qui permet, mais cette fois en toute compréhension, de remplacer la division $(17,4 : 0,87)$ par la division $(1740 : 87)$.

18. L'EXPLORATION DE L'ESPACE

Dans l'enseignement traditionnel, la géométrie apparaissait en cinquième année seulement, c'est-à-dire à 10-11 ans. Cette position était raisonnable dans la mesure où les notions géométriques enseignées comprenaient exclusivement le passage en revue des propriétés des figures planes et la construction de figures relevant bien plus du dessin technique que de la géométrie proprement dite. En choisissant comme titre de chapitre une définition plus générale, l'exploration de l'espace, nous désirons souligner l'extension du champ sur lequel les enfants seront invités à réfléchir et lier étroitement les notions géométriques aux autres parties du plan d'études.

Il faut cependant remarquer que, dans la mise en place de la réforme, c'est généralement l'exploration de l'espace qui est apparue en dernier. De ce fait, nos investigations dans ce domaine sont encore peu nombreuses. C'est la raison pour laquelle il faudra considérer, plus encore que dans les chapitres précédents, les pages qui suivent comme une esquisse de ce qui peut être abordé par les élèves et non comme un programme complet et définitif. Nonobstant un certain nombre d'essais à propos de tous les thèmes du programme, nous ne signalerons que les notions qui nous paraissent actuellement suffisamment précisées.

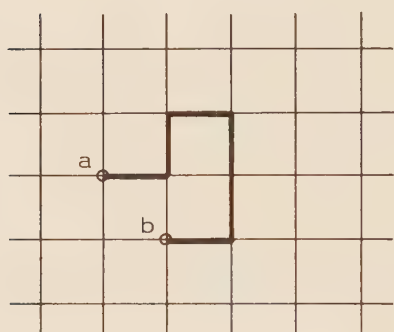
18.1 L'élaboration d'un système de coordonnées

L'utilisation d'un système de coordonnées est indispensable pour l'étude de nombreuses situations mathématiques. On la rencontre non seulement en géométrie mais aussi dans la plupart des représentations d'une application. En outre, elle intervient dans des activités de la vie courante telles que l'étude d'un plan, la consultation d'un graphique ou d'un horaire, l'emploi d'une balance automatique, etc...

Les exercices de déplacement dans un quadrillage constituent une préparation à la compréhension de ce qu'est un système de coordonnées. La construction de tableaux à double entrée et l'exploitation de la notion de produit cartésien ont déjà donné l'occasion à l'enfant de se familiariser avec l'idée de couple. Dans le quadrillage, il s'agira non plus de travailler dans des cases, mais de jouer sur les lignes et sur les noeuds.

En deuxième et troisième années, l'objectif visé consiste en un codage de déplacements au moyen de différents codes sans la présence d'un système de référence unique. Le codage des déplacements d'un point à un autre tient exclusivement compte de la position respective de ces points l'un par rapport à l'autre et non de leur place dans l'ensemble du plan.

Les premiers codages seront très proches de la représentation du trajet réellement effectué par l'enfant. On utilisera, par exemple, une série de flèches.



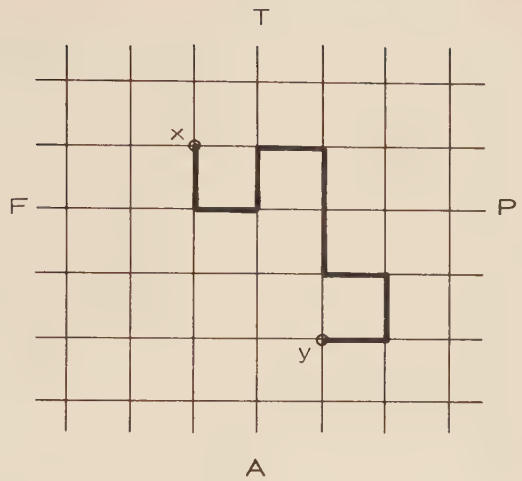
Code du chemin de a à b



On constatera qu'une représentation de ce type exige déjà un certain pouvoir d'abstraction. Si les élèves parviennent aisément à noter le code du chemin qu'ils parcourent, ils auront plus de difficulté à effectuer un trajet en fonction d'un code donné; l'exercice le plus difficile consistera, après avoir effectué physiquement un déplacement et avoir codé ce déplacement, à coder le cheminement permettant de revenir au point de départ sans effectuer au préalable le déplacement réel, celui-ci n'intervenant qu'au moment du contrôle du code. Il n'est pas besoin de répéter une fois de plus combien, dans ces situations, le travail par groupes d'élèves se contrôlant mutuellement est d'une nécessité absolue.

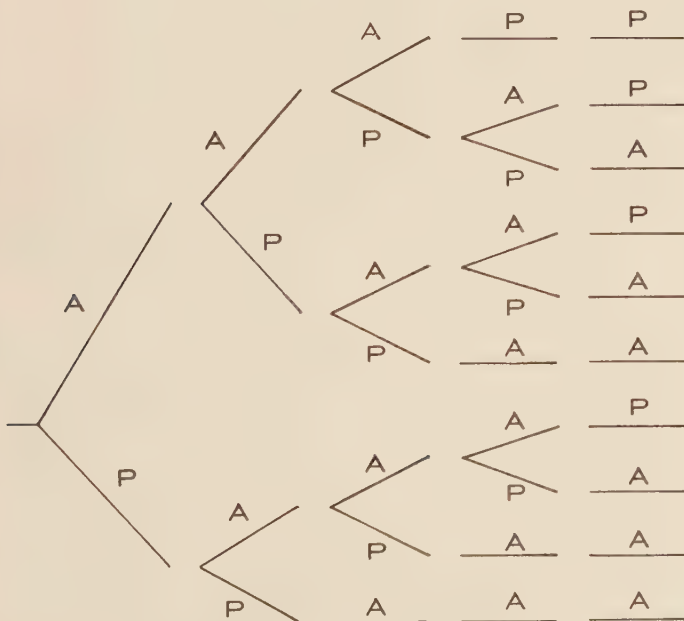
Dans une seconde étape, on pourra convenir d'une indication générale de direction. Selon le niveau de développement des enfants, le code sera choisi arbitrairement ou fera intervenir la notion de points cardinaux.

- P = côté porte
F = côté fenêtre
A = côté armoire
T = côté tableau noir



Le déplacement de x à y sera
codé A-P-T-P-A-A-P-A-F.

La phase suivante amènera l'enfant à la notion de chemin le plus court et à la recherche de chemins équivalents. Ainsi, dans le cas ci-dessus, l'élève constatera expérimentalement que les chemins les plus courts permettant d'aller x à y sont au nombre de dix. Cette recherche pourra s'effectuer au moyen d'un arbre de classement. Celui-ci présentera certaines différences avec ceux qui peuvent être établis dans un jeu de classement du fait que les derniers tronçons seront déterminés par les choix précédents. L'arbre représentant les dix chemins équivalents conduisant de x à y sera le suivant :



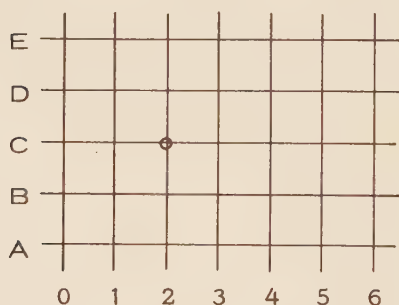
Plusieurs recherches de ce genre feront découvrir à l'enfant que la position respective des différents tronçons n'influe pas sur le point d'arrivée. Le chemin A-P-T-P-A-A-P-A-F conduit au même endroit que le chemin A-T-P-P-A-A-A-P-F. Les tronçons de sens opposés s'éliminant par paires, nous obtenons, comme ci-dessus ~~A-T~~-P-P-A-A-~~A-P~~ soit P-P-A-A-A.

Ces observations donneront à l'enfant les moyens de simplifier une chaîne sans avoir recours au dessin. C'est bien ce que nous attendons lorsqu'il s'agira d'effectuer, par exemple, l'opération $(+2) + (-3) = (-1)$.

Les exercices qui précèdent constituent donc une excellente préparation à l'approche des opérations sur les entiers relatifs.

A partir de la quatrième année, une nouvelle dimension sera introduite par le choix d'un point d'origine.

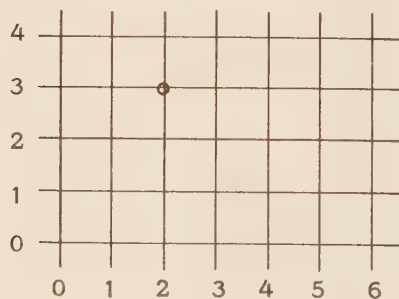
Exemple :



Le point x sera codé

$\langle 2 ; C \rangle$

Puis on abordera le codage de l'abscisse et de l'ordonnée au moyen des mêmes symboles, en général des nombres.

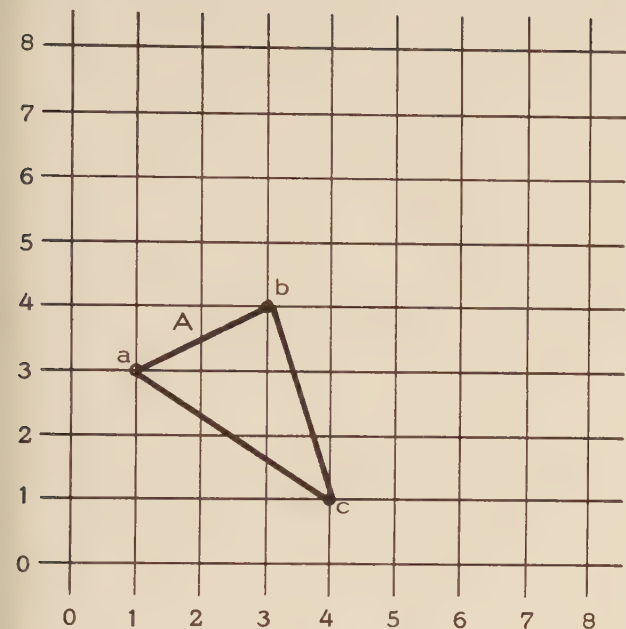


Le point y sera codé

$\langle 2 ; 3 \rangle$

A ce stade de l'apprentissage, des exercices de translation viendront consolider la notion.

Exemple :



Les sommets de la figure A sont codés :

$$a < 1 ; 3 >$$

$$b < 3 ; 4 >$$

$$c < 4 ; 1 >$$

Les élèves sont invités à dessiner de nouvelles figures selon les codes suivants :

$$a_1 < 1 + 4 ; 3 >$$

$$a_2 < 1 ; 3 + 5 >$$

$$b_1 < 3 + 4 ; 4 >$$

$$b_2 < 3 ; 4 + 5 >$$

$$c_1 < 4 + 4 ; 1 >$$

$$c_2 < 4 ; 1 + 5 >$$

L'enfant découvrira en exécutant les figures que celles-ci ne sont pas modifiées mais qu'elles subissent une simple translation vers la droite ou vers le haut.

Un exercice du même genre fera apparaître la nécessité du codage par les nombres négatifs. Il suffira, pour cela, de proposer les translations :

$$a_3 < 1 - 3 ; 3 >$$

$$a_4 < 1 ; 3 - 5 >$$

$$b_3 < 3 - 3 ; 4 >$$

$$b_4 < 3 ; 4 - 5 >$$

$$c_3 < 4 - 3 ; 1 >$$

$$c_4 < 4 ; 5 - 5 >$$

Nous aurons ainsi obtenu tous les éléments permettant aussi bien de développer les exercices de translations, de symétries, de rotations, que de comprendre ce qu'est un nombre négatif et de disposer des moyens utiles à la représentation d'une application affine.

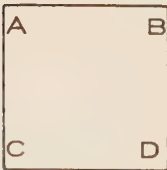
18.2 Translations, symétries et rotations

Nous venons de voir comment l'idée de translation pouvait être abordée dans un système de coordonnées. Le développement de ces activités conduira tout naturellement à des exercices portant sur la composition de deux translations qu'il n'est pas nécessaire de décrire dans le détail.

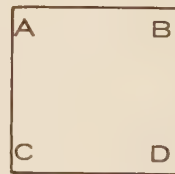
L'étude de la symétrie est particulièrement intéressante lorsqu'on l'envisage comme une opération qui fait correspondre une figure à une autre. Cette manière de faire nous ramène à la notion de structure de groupe déjà discutée dans le chapitre consacré aux opérations.

Prenons le cas simple du carré et n'utilisons que les axes de symétrie parallèles à un côté. Le carré peut ainsi subir 4 transformations.

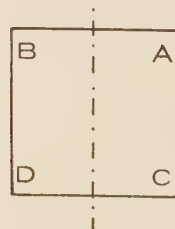
Figure initiale



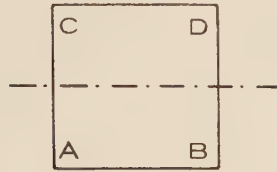
e = Transformation identité



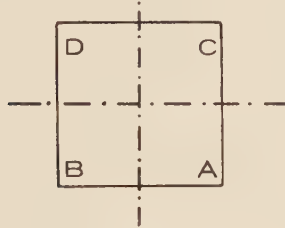
v = Transformation par symétrie d'axe vertical



h = Transformation par symétrie d'un axe horizontal



d = Transformation par double symétrie (verticale et horizontale)

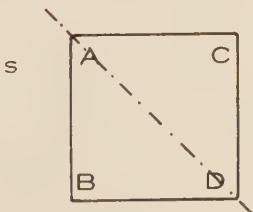


Après une suite d'activités du type de celles décrites dans le chapitre 20.1, les élèves aboutiront au tableau de composition du groupe des transformations du carré soit :

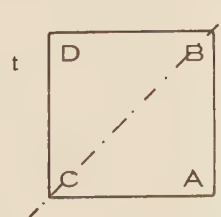
	e	v	h	d
e	e	v	h	d
v	v	e	d	h
h	h	d	e	v
d	d	h	v	e

Nous obtenons ici un groupe de Klein, différent de ceux déjà rencontrés. Chaque élément est son propre symétrique.

Mais nous pouvons introduire dans notre jeu les symétries par la diagonale soit :



et



Construisons le tableau de composition des 6 opérations.

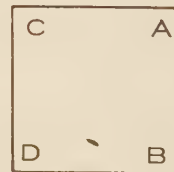
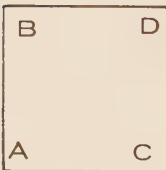
	e	v	h	d	s	t	
e	e	v	h	d	s	t	
v	v	e	d	h			
h	h	d	e	v			
d	d	h	v	e	t	s	
s	s				t	e	d
t	t				s	d	e

En effectuant les manipulations nécessaires, les élèves se rendront compte que certaines cases n'ont pas de solution parmi les opérations déjà envisagées.

Est-ce à dire que nous n'avons plus une structure de groupe ? L'étude attentive du problème donnera aux enfants la possibilité de découvrir que deux cas peuvent encore se présenter et que deux nouvelles opérations sont nécessaires.

u = quart de tour dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

z = quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre



Le tableau définitif peut cette fois être réalisé. Nous sommes encore en présence d'une structure de groupe mais l'opération n'est plus commutative.

* ↙	e	v	h	d	s	t	u	z
e	e	v	h	d	s	t	u	z
v	v	e	d	h	z	u	t	s
h	h	d	e	v	u	z	s	t
d	d	h	v	e	t	s	z	u
s	s	u	z	t	e	d	v	h
t	t	z	u	s	d	e	h	v
u	u	s	t	z	h	v	d	e
z	z	t	s	u	v	h	e	d

On constate, par cet exemple, qu'une situation paraissant au départ très simple prend rapidement un degré de complexité telle qu'elle constitue un sujet de réflexion intense pour des élèves de sixième année. Les symétries du rectangle, du triangle équilatéral, du losange, de l'hexagone, pourront être développées de la même façon.

Nous ne reviendrons sur les rotations que pour dire qu'elles ont déjà été abordées à propos des opérations non numériques et de la notion de classe de reste. Cependant, celles-ci donneront lieu à des développements utiles lorsque les élèves aborderont la notion d'angle et que, au lieu d'envisager seulement les rotations plaçant la figure dans la même position, on pourra travailler la rotation autour d'un point.

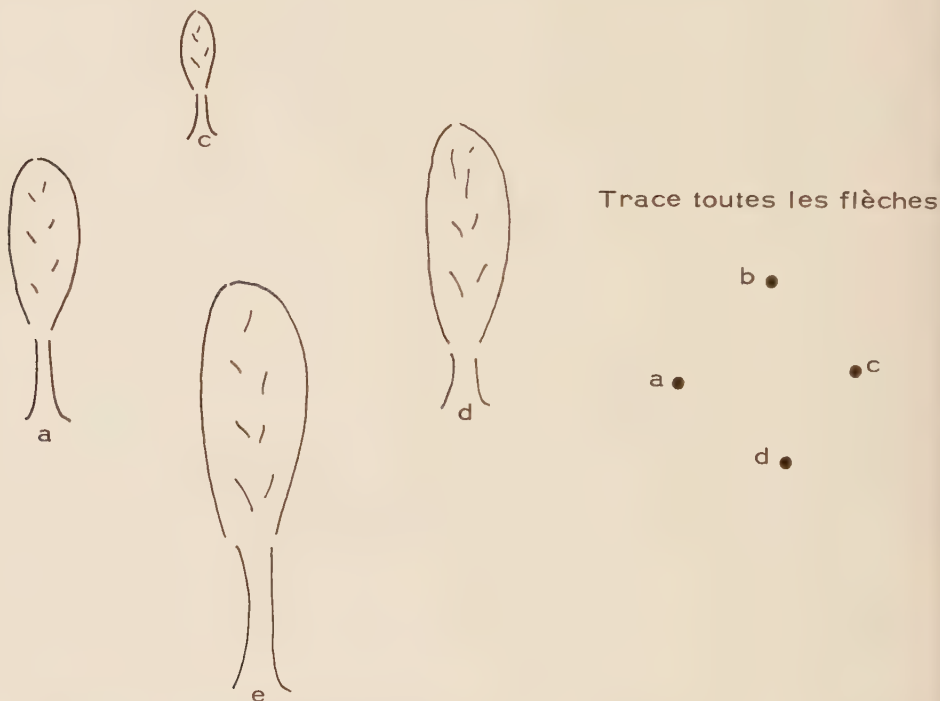
18.3 La mesure

Dans l'enseignement traditionnel, la notion de mesure paraissait davantage liée aux opérations arithmétiques et à la résolution des problèmes qu'à l'exploration de l'espace. Il est, à notre avis, indispensable que la nécessité même de la mesure jaillissent spontanément dans le cadre d'activités où cette mesure est avant tout qualitative.

Dans le cadre des exercices de sériation déjà, les enfants seront confrontés avec ce problème. S'il s'agit par exemple de sérier des arbres découpés dans du carton, l'enfant travaillera par comparaison directe en prenant les éléments deux à deux.

Le fait que les mêmes figures ne soient plus découpées mais dessinées sur une seule feuille obligera l'enfant à trouver un moyen pour effectuer la mesure.

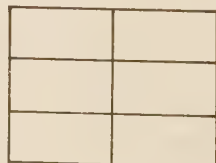
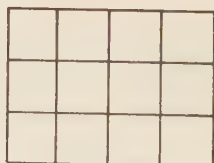
Exemple : La flèche signifie : "... est plus élevé que ..."



Il est évident que, en deuxième et troisième années, le recours aux instruments habituels, double-décimètre ou mètre pliant, ne devrait avoir lieu qu'en dernier ressort et seulement si les enfants eux-mêmes le proposent. De plus, même si c'était le cas, l'instituteur devrait trouver une motivation suffisante pour que les élèves utilisent des moyens de comparaison non gradués.

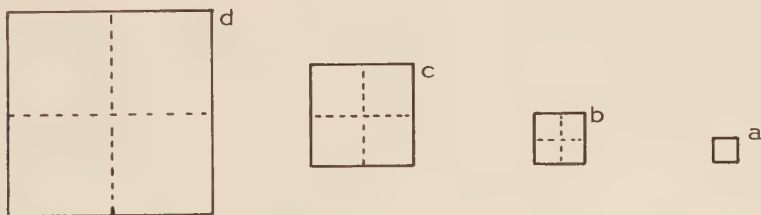
Les premières comparaisons de surfaces s'effectueront par recouvrement au moyen de figures-unités de différentes formes, celles-ci étant choisies de telle sorte qu'un recouvrement exact soit possible.

Exemples :

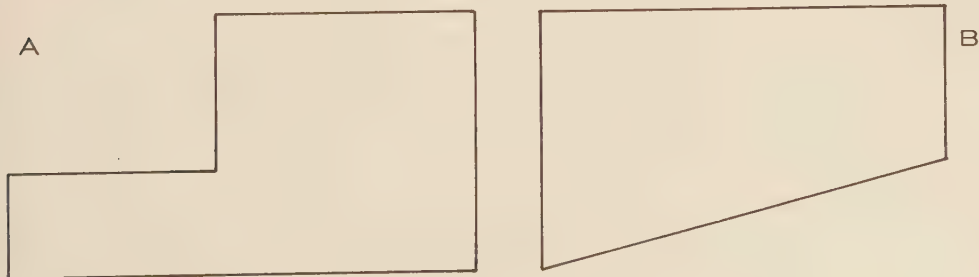


En quatrième année, la mesure par approximation sera abordée. Elle interviendra à propos de longueurs (mesure de la longueur d'une ligne au moyen de baguettes de différentes dimensions), de contenances (comparaison de la contenance de deux vases à fleurs par remplissage au moyen d'une bouteille ou d'un verre), éventuellement de poids (balance) mais c'est la mesure des surfaces qui semble la situation la plus favorable pour une prise de conscience véritable des notions d'approximation et d'encadrement. Remarquons encore que, jusqu'à 8-9 ans, nous avons fait apparaître la mesure soit par l'utilisation d'un mesurant plus grand que la figure à mesurer où intervient la notion de repère, soit par recouvrement en utilisant un nombre suffisant d'éléments-unité. En quatrième année, l'innovation consistera d'une part en une approche de la mesure par itération de l'unité, d'autre part en la comparaison d'unités de mesure de différentes dimensions en relation avec les notions de groupements en différentes bases et d'échanges traitées dans le chapitre sur la numération.

Choisissons, à titre d'exemple, la comparaison de deux figures au moyen d'unités formées de carrés constituant un système de mesure en base quatre.



Les élèves doivent composer l'aire des figures A et B au moyen des unités qui sont données en nombre insuffisant pour recouvrir les deux figures de telle sorte que les enfants soient contraints de coder le résultat de leurs observations.



La démarche consiste à trouver, par encadrement, la meilleure approximation de la mesure.



La figure A mesure exactement (1d, 2c, 9b).

La figure B mesure plus que (1d, 2c, 4b, 8a) mais moins que (1d, 2c, 4b, 24a).

Sous cette forme, l'information n'est guère utilisable. Les échanges donneront quelque chose de plus clair :

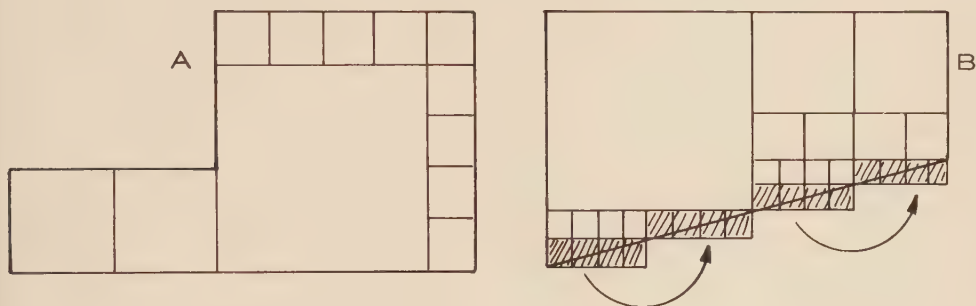
$$\text{Aire de A} = (2d ; 0c ; 1b ; 0a)$$

$$(1d ; 3c ; 2b ; 0a) < \text{Aire de B} < (2d ; 0c ; 2b ; 0a)$$

Ceci nous permettra de constater que l'aire des deux figures est voisine de 2d mais ne nous autorisera pas à dire laquelle des deux figures est la plus grande.

Les enfants reviendront donc à la figure pour essayer de travailler par compensation.

Cette situation constitue déjà une approche de la détermination de l'aire d'un triangle.



L'aire de B vaudra donc $(1d, 2c, 4b, 16a)$ soit $(2d; 0c; 0b; 0a)$.
A est donc plus grand que B.

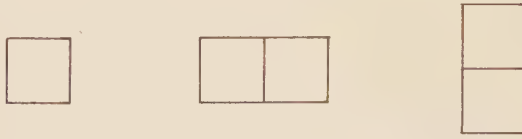
On constate, par cet exemple, que tout l'art du pédagogue réside dans le choix judicieux des figures à mesurer de telle sorte que celles-ci impliquent obligatoirement le type de recherche vers lequel on souhaite diriger les élèves. Si, en quatrième et cinquième années, les enfants ont l'occasion d'effectuer un certain nombre d'activités de ce genre, il ne sera presque pas nécessaire de leur fournir les fameuses règles de calcul de l'aire des quadrilatères ou des triangles qui auront été découvertes implicitement et qui devraient avoir un caractère opératoire plus marqué que par le passé.

18.4 Arrangements de carrés, aire et périmètre du rectangle

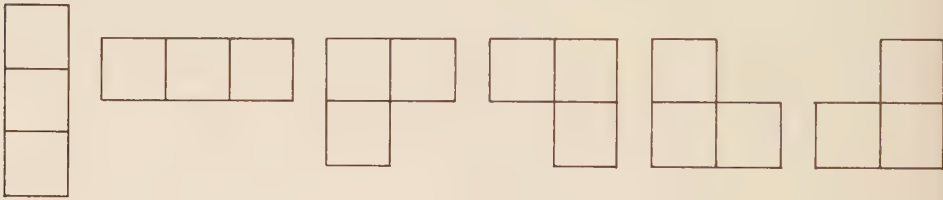
Les exercices qui vont être présentés ci-dessous peuvent être abordés dès la troisième année, mais c'est à partir de la quatrième année surtout qu'ils donneront l'occasion de réflexions intéressantes.

Nous allons, soit par manipulation de carrés de carton, soit par le dessin, construire selon les axes d'un quadrillage des figures formées d'un nombre fixé de carrés.

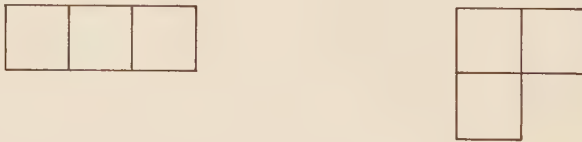
Il est évident qu'un seul carré ne permet qu'une figure tandis qu'on peut en former deux avec deux carrés.



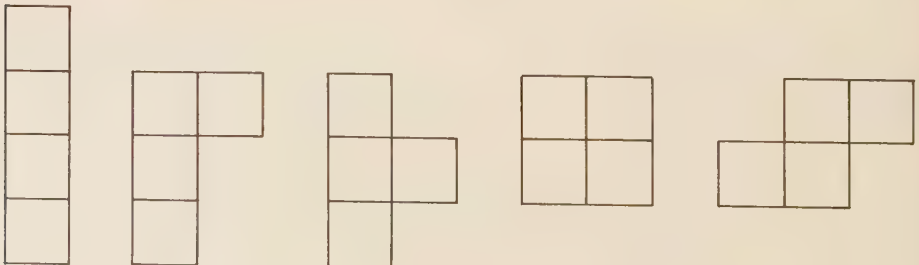
A partir de trois carrés, la collection est plus riche.



Nous pouvons ici convenir d'une nouvelle règle du jeu qui permettra de ne conserver qu'une seule figure comme représentant de la classe des figures obtenues par symétrie. De ce fait, la collection ci-dessus se réduira à deux éléments.



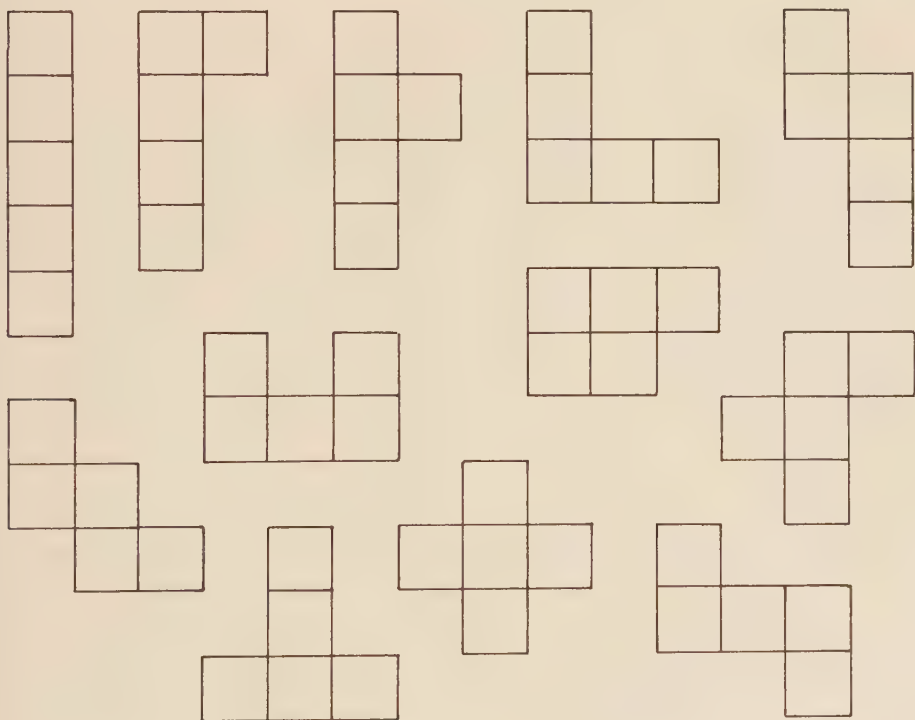
Construisons maintenant l'ensemble des figures formées de quatre carrés. Pour simplifier les choses, nous admettrons directement de ne retenir qu'un seul représentant de chaque classe des figures obtenues au moyen d'une transformation par symétrie.



Il est maintenant possible d'effectuer une petite récapitulation de ce qui a été obtenu.

Nombre de carrés	Nombre de figures
1	1
2	1
3	2
4	5

Combien formerons-nous de figures composées de cinq carrés chacune ? Laissons les enfants estimer la réponse avant de construire la collection. Cette construction posera d'ailleurs un problème intéressant de méthode de travail à établir pour être sûr d'obtenir toutes les figures possibles.



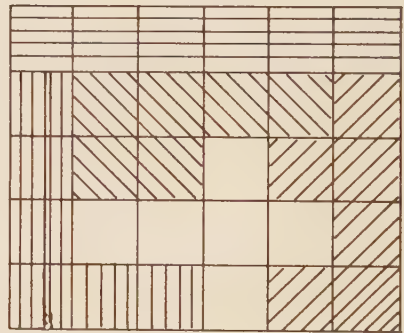
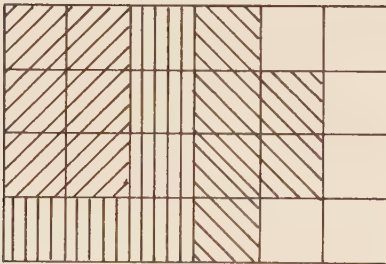
On constate que le passage de 4 à 5 carrés accroît le nombre des figures différentes d'une façon considérable. Celles-ci passent de 5 à 12.

Il est naturellement possible d'envisager la même recherche sur des figures composées d'un plus grand nombre de carrés mais avec 6 déjà, le nombre des figures devient si grand - il y en a 35 - qu'il n'est guère possible d'envisager la construction de toutes celles-ci.

Des activités portant sur une partie de l'ensemble des figures seront pourtant très intéressantes dans la mesure où elles exigeront de la part de l'enfant la construction d'une méthode de travail systématique qui lui permettra de ne garder chaque fois qu'un seul représentant des figures obtenues par une simple ou une double symétrie axiale.

Le matériel ainsi construit offrira également de nombreuses possibilités de constructions par combinaison de plusieurs figures. On pourra, par exemple, essayer de découvrir tous les rectangles qui peuvent être formés en employant des figures différentes comprenant 6 carrés.

Exemples :



On voit apparaître ici la liaison entre ce genre d'activité et le calcul de l'aire du rectangle. Les dimensions choisies devront toujours donner un produit qui soit un multiple de 6.

En cinquième année, d'autres jeux conduiront l'enfant à l'examen du nombre des tronçons formant l'extérieur de chaque figure, c'est-à-dire à une approche de la notion de périmètre.

L'observation montrera, par exemple, que des figures formées d'un nombre de carrés différents peuvent avoir même périmètre. Voici trois figures dont le périmètre vaut 10 :



Nous pouvons rester dans le même genre de situation en effectuant une série de recherche sur la relation entre le périmètre et l'aire des rectangles.

Commençons par construire des rectangles (et des carrés) de différentes dimensions.



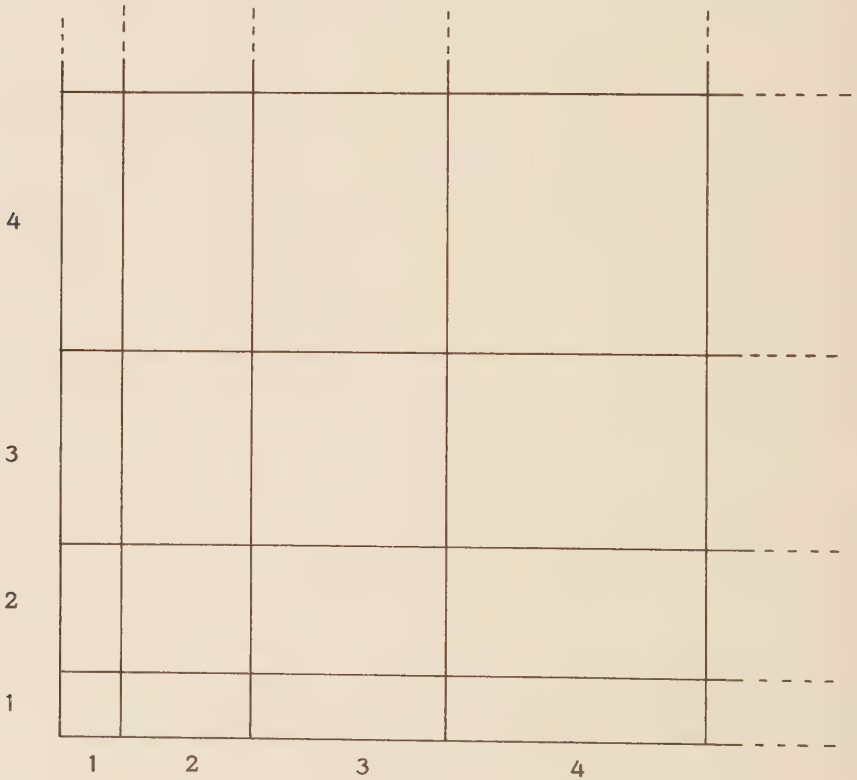
Essayons maintenant d'ordonner ces figures afin d'en établir une collection exhaustive.



Dans chaque ligne, le périmètre de la figure reste constant. Quelles sont, pour un périmètre donné, les figures dont l'aire est la plus grande ? Celles qui sont le plus proches du carré.

Remarquons encore que la construction de l'ensemble des figures permet une nouvelle approche de la table d'addition lorsque l'on s'intéresse au demi-périmètre et de la table de multiplication lorsque l'attention se porte sur l'aire des rectangles.

Nous signalerons encore la remarquable méthode de construction de l'ensemble des figures découvertes spontanément par une fillette de 11 ans. La voici :



Il suffit de développer le tableau pour que tous les rectangles apparaissent. Cet exemple illustre bien l'esprit dans lequel les activités de l'enfant doivent être dirigées afin de favoriser autant que possible la création personnelle.

Dans une seconde étape, le même problème sera repris en utilisant comme unités le cm et le mm. L'analyse de la suite des figures obtenues préparera, d'une manière toute intuitive, une approche de l'idée de nombre réel.

D'une part, l'enfant comprendra que, pour un périmètre donné, le nombre des combinaisons longueur-largeur est infini ; d'autre part, après avoir constaté que, à périmètre égal, l'aire la plus grande est celle de la figure carrée, il découvrira que l'aire diminue en fonction inverse de la différence entre la longueur et la largeur. Plus la différence entre longueur et largeur est grande, plus l'aire est petite, celle-ci devenant nulle lorsque la largeur est de zéro.

18.5 L'approche des figures planes

Dès le début de la scolarité, les élèves ont acquis un vocabulaire leur permettant de reconnaître et de désigner un carré, un rectangle, un triangle, un disque, ou d'autres figures. Cette connaissance s'appuie sur la perception et non sur l'analyse des propriétés des figures. C'est l'un des raisons pour lesquelles l'enfant éprouve de la difficulté à admettre qu'un carré soit un rectangle ou qu'un losange soit un parallélogramme ; la définition des quadrilatères ayant parfois varié selon les manuels, nous nous appuyerons exclusivement sur celle qu'en donne Warusfel (69).

Lorsqu'il s'agit de passer d'une simple reconnaissance perceptive à l'analyse des propriétés d'une figure, la tentation est grande, pour le maître de proposer à ses élèves l'exploration systématique et successive de chaque figure géométrique. Cette manière d'envisager les choses présente l'inconvénient de rendre plus difficile l'acquisition des propriétés prises dans leur sens le plus général. Il semble plus utile de partir de l'exploration des symétries, des diagonales, des angles, des côtés, et de se livrer à des comparaisons entre des figures différentes. Un simple exemple illustrera notre manière de concevoir l'activité mathématique à propos des figures planes.

Les élèves sont tout d'abord invités à préparer un ensemble d'éléments sur lesquels s'exercera la réflexion. Proposons, par exemple, à chaque élève d'une classe de dessiner trois figures formées de quatre lignes droites. Nous disposerons ainsi, en quelques minutes, de 80 à 90 figures différentes.

En voici quelques-unes :



a



b



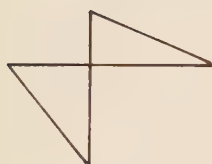
c



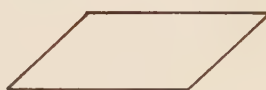
d



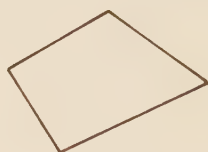
e



f



g



h



i



j



k



l



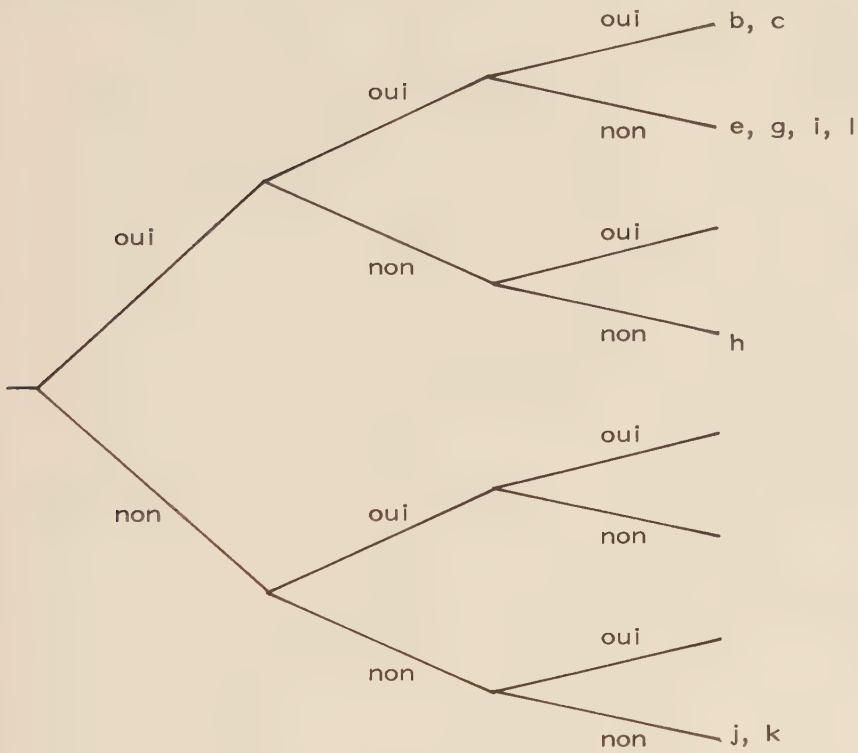
m

Comment peut-on classer ces figures ? L'observation permettra aux enfants de retenir certains critères de classement.

- figure ouverte ou fermée ;
- figure simple ou complexe ;
- figure convexe ou non-convexe ;
- au moins une paire de parallèles ;
- au moins deux angles droits ;
- etc...

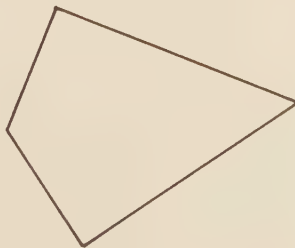
Retenons seulement les figures simples et fermées. Nous obtiendrons l'arbre suivant.

Figure convexe Au moins une paire de parallèles Au moins deux angles droits



Nous constatons qu'aucun élément ne trouve place à l'extrémité de certaines branches. Est-il possible de tracer une figure convexe n'ayant pas une paire de parallèles mais au moins deux angles droits ?

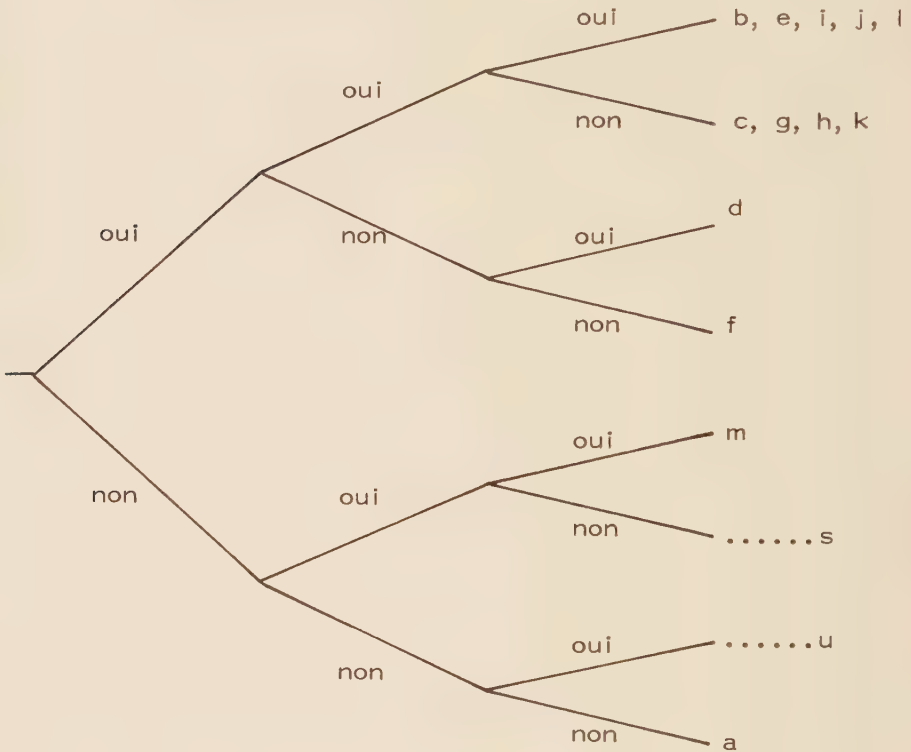
En voici une :



Peut-on construire un quadrilatère non-convexe ayant au moins une paire de parallèles ? La réponse est non. Cette partie de l'ensemble est vide. De même, il n'existe pas de quadrilatère non-convexe qui possède au moins deux angles droits.

Effectuons un autre classement :

Figure fermée Figure simple Au moins un axe de symétrie



Trouvera-t-on des figures correspondant aux lettres s et u ? En voici deux exemples :



On constate, par ces quelques exemples, combien l'extension des activités à des figures non conventionnelles peut apporter de richesse dans l'exploration des figures. Il sera toujours temps, en second lieu, d'insister sur les propriétés des figures les plus connues.

19. CONCLUSION

Nous rappellerons, en préambule à la conclusion, quels étaient les objectifs généraux de la recherche :

- Détermination des connaissances en arithmétique des élèves qui ont achevé la scolarité obligatoire.
- Mise en évidence des problèmes liés à l'enseignement de l'arithmétique à l'école primaire.
- Elaboration et réalisation d'un plan de réforme de l'enseignement basé sur les données récentes de la mathématique et de la psychopédagogie.
- Création expérimentale d'une esquisse de méthodologie de l'enseignement de la mathématique à l'école primaire.

Le spécialiste en pédagogie expérimentale trouvera probablement que la part consacrée aux méthodes d'analyse quantitative est congrue et que notre champ d'action a été trop large pour que l'investigation s'effectue en profondeur. En réalité, notre intention était, selon la définition de Louis Legrand, la réalisation d'un dispositif général d'innovation contrôlée, étant entendu que d'autres travaux viendront par la suite, sur des points précis, apporter la contribution d'une plus grande rigueur scientifique.

En cours de rédaction, notre souci constant a été la création d'un instrument de travail qui puisse être mis à la disposition du corps enseignant ou des cadres de l'enseignement. Nous avons donc cherché à éviter autant que possible le langage ésotérique propre aux seuls spécialistes et les digressions relatives aux méthodes utilisées en cours de recherche. Nous souhaitons que le lecteur trouve dans cet ouvrage la justification de la nécessité d'un changement profond de l'enseignement de la mathématique, des idées relatives à la conduite de l'enseignement, des exemples concernant l'évaluation de l'apprentissage effectué par l'élève.

19.1 Le chemin parcouru

La première enquête a tenté de mettre en évidence le degré d'assimilation, par les élèves du dixième degré soit des adolescents de 15 à 16 ans, de ce que l'on pourrait considérer comme le contenu minimum du programme d'arithmétique des six premières années de la scolarité élémentaire.

Les résultats enregistrés ont confirmé avec évidence l'hypothèse selon laquelle les adolescents qui entrent en apprentissage disposent de connaissances en arithmétique extrêmement minces et que les efforts consentis tout au long de la scolarité obligatoire n'ont guère porté de fruits. Ils ont également montré que les adolescents qui poursuivent des études longues n'ont pas assimilé aussi complètement qu'on serait tenté de le croire les notions qui leur ont été enseignées à l'école primaire. De plus, il s'est avéré qu'une partie des notions figurant dans les plans d'études de l'école primaire ne présentaient guère d'intérêt aussi bien dans le cadre des études longues que dans celui des apprentissages de type pratique.

L'analyse des items laisse apparaître une grande rigidité dans l'acquisition des connaissances. Celles-ci peuvent être utilisées dans des cas particuliers bien précis, correspondant aux exercices scolaires rencontrés, mais ne sont guère susceptibles d'une généralisation. En outre, les connaissances sont mal structurées entre elles, chacune étant apprise pour elle-même, sans que l'élève soit capable de la situer dans un édifice cohérent. Enfin, l'élève ne dispose pas d'une méthode de travail qui lui permette d'adopter, en présence d'un problème, la stratégie la plus adéquate, mais il se borne à reproduire de manière stéréotypée les modèles qui lui ont été inculqués.

Une seconde enquête, conduite dans les degrés 3 à 6 de la scolarité primaire, a confirmé chez les enfants de 8 à 12 ans la rigidité avec laquelle sont assimilés les mécanismes de calcul et les modèles de résolution des problèmes. Cette étude, basée sur une batterie de 16 épreuves trimestrielles a mis en évidence l'hétérogénéité considérable des résultats observés à l'intérieur d'une même classe. Elle nous conduit, de ce fait, à nous demander quelle est la proportion des élèves d'une classe qui, dans un enseignement de type collectif tel qu'il est conçu dans l'enseignement traditionnel, bénéficie réellement des efforts du maître.

L'analyse détaillée des items nous conduit à faire preuve d'un certain pessimisme quant à la valeur et à l'efficacité d'un modèle d'enseignement qui s'avérerait suffisant dans une structure scolaire de type sélectif mais qui nous paraît en contradiction flagrante avec les efforts consentis pour une démocratisation des études et pour le développement d'une éducation qui se voudrait permanente. Cette analyse tend à mettre en évidence une surestimation constante des possibilités réelles de la majorité des élèves ou, ce qui revient au même, une incapacité de l'école à hausser ses méthodes d'enseignement à la hauteur des exigences affichées par les plans d'études.

Parallèlement aux observations effectuées, une étude des tendances récentes dans le domaine de l'enseignement des mathématiques a été entreprise. A partir des observations recueillies, un nouveau modèle d'enseignement de la mathématique à l'école primaire a été élaboré. Ce dernier a donné lieu à une très large expérimentation comprenant l'élaboration d'un plan d'études, la définition de méthodes d'enseignement, la création de manuels et de matériels, la mise en place d'un dispositif d'information et de formation du corps enseignant en exercice.

L'expérience, conduite sur une durée de quatre ans, a bénéficié d'un très large appui de tous les milieux intéressés de l'enseignement. Plusieurs centaines de maîtres et plusieurs milliers d'élèves y ont participé.

Une évaluation systématique des effets de l'enseignement jointe à une collaboration étroite avec le corps enseignant ont permis de dégager peu à peu les lignes de force d'une nouvelle méthodologie, de procéder à des ajustements successifs, de contrôler la validité des hypothèses avancées, avec le souci constant de la construction d'un enseignement accessible à tous, aussi indépendant que possible du milieu socio-culturel de l'enfant, évitant les blocages prématurés et ne perdant pas de vue le fait que, s'il est indispensable de fournir d'excellentes bases de départ aux élèves qui entreront dans un cycle d'études secondaires long, il est encore plus important de donner une formation mathématique aussi solide que possible à la masse des élèves qui se dirigent vers les apprentissages professionnels à la fin de la scolarité obligatoire.

19.2 Les problèmes ouverts

Certes, le travail est loin d'être achevé. L'étude, conduite de manière très globale, permet d'envisager des perspectives de développement intéressantes. Le niveau de développement logico-mathématique, l'engagement personnel en présence d'un problème, l'intérêt pour la mathématique se sont accrus en même temps que le taux de retard scolaire accusait une diminution sensible. Néanmoins, le seuil atteint et les dispositions envisagées ne constituent qu'une étape sur un chemin qui devrait s'étendre sur plusieurs années encore.

Parmi les problèmes qui devront faire l'objet d'études approfondies dans un avenir proche, nous citerons en premier lieu une définition plus précise des objectifs successifs assignés à l'enseignement de

la mathématique et l'établissement d'une hiérarchie plus claire des différentes activités auxquelles peuvent être soumis les élèves. En effet, l'élargissement considérable du champ sur lequel se développe l'activité mathématique contribue à donner au maître un sentiment d'insécurité. L'instituteur, devant la masse des jeux et des exercices de tous ordres que lui proposent les manuels et les revues pédagogiques, éprouve de la difficulté à effectuer un choix, à définir une ligne d'action, à distinguer l'essentiel de l'accessoire. Des recherches psychopédagogiques conduites dans le terrain scolaire devraient permettre de dégager les cheminements les plus sûrs.

En second lieu, le problème de la qualité de l'emploi du temps et du moment opportun pour la présentation d'une notion donnée est loin d'être résolu. Il est encore bien difficile de déterminer avec quelle précision à quel moment des notions comme l'inclusion, la soustraction, la structure de groupe, pour ne citer que quelques exemples, peuvent être abordées avec le plus de profit par l'élève. Les observations que nous avons effectuées donnent quelques indications dans ce domaine mais, la plupart du temps, elles ne permettent pas encore de déterminer le temps passé à l'étude d'un sujet et la qualité des acquisitions qui s'y rapportent. Nous avons l'impression que, parfois, on consacre vingt à trente heures pour l'assimilation d'une notion qui, si elle était placée à un autre moment dans la filière des activités mathématiques, ne requerrait que quatre à cinq heures. Il y a dans ce domaine un champ d'investigation très vaste à explorer en étroite collaboration avec le corps enseignant.

En troisième lieu, nous citerons la question de la résolution des problèmes. Souvent, l'on nous a fait la remarque que nous ne proposons pas de problèmes aux élèves. Il était sous-entendu par là que les enfants ne reçoivent que rarement un texte écrit qu'il s'agit de décoder pour en extraire des informations d'ordre mathématique et répondre à une question précise. Et pourtant, si nous retenons la définition que donne Oléron,

"... en principe, toute situation à laquelle le répertoire de réponses immédiatement disponible chez un sujet ne permet pas à celui-ci de fournir une réaction appropriée est un problème.

... On ne peut parler de problème que lorsqu'une solution est possible... Une équation du second degré ou une racine carrée ne sont pas non plus des problèmes pour un enfant de 6 ans.

... De même la solution doit être obtenue par des moyens intellectuels. Si le sujet vient à bout de la situation par le seul développement d'une capacité ou d'une habileté automatiquement acquises, il s'agit seulement d'adaptation ou d'apprentissage". (70)

Il semble que les activités proposées aux élèves dans le cadre du nouvel enseignement présentent un nombre plus grand de véritables problèmes que ce n'était le cas dans l'enseignement traditionnel où les problèmes exigeaient le plus souvent l'utilisation correcte d'un simple mécanisme.

Il n'en reste pas moins que la question de savoir s'il est nécessaire que l'enfant subisse un entraînement au décodage d'un problème donné sous forme d'un énoncé verbal n'a pas reçu de réponse. Dans le cas où celle-ci serait affirmative, il s'agirait alors de déterminer l'âge optimum auquel cette activité doit apparaître et d'en étudier la progression du double point de vue de l'acquisition de la langue et du contenu mathématique. Dans le cas contraire, une étude plus approfondie de la notion de problème prise dans son sens général devrait contribuer à un développement plus harmonieux du raisonnement logico-mathématique.

En quatrième lieu, il faut relever le problème de la liaison entre l'enseignement de la mathématique et la formation professionnelle. Si la voie semble clairement tracée pour les élèves qui entreprendront des études secondaires longues, il n'en est pas encore de même pour les futurs apprentis. Nous avons vu que l'enseignement traditionnel ne parvenait pas à donner aux apprentis la formation mathématique dont ces derniers avaient besoin. Le nouvel enseignement paraît assurer une progression continue, même pour les élèves les moins doués, jusqu'à la sixième année primaire. Il faudra donc apporter également des modifications profondes dans les classes qui reçoivent, pour les trois dernières années de la scolarité obligatoire, les élèves qui se destinent à un apprentissage manuel.

19.3 Perspectives d'avenir

La réforme entreprise sur le plan expérimental a été conduite par des extensions successives jusqu'à un début de généralisation à l'ensemble des élèves genevois de 6 à 8 ans. En septembre 1973, un enseignement de la mathématique s'inspirant largement des expériences genevoises sera introduit dans l'ensemble de la Suisse romande. Il convient donc d'attirer l'attention sur le fait que la

réforme est loin d'être achevée. Il s'agira tout d'abord de poursuivre une évaluation systématique des résultats obtenus aussi bien à court terme, pour apporter les ajustements nécessaires, qu'à longue échéance, afin de vérifier les effets du nouvel enseignement à la fin de la scolarité obligatoire.

De nombreuses études de caractère psychopédagogique seront encore nécessaires pour améliorer la qualité de l'enseignement et celle des conditions dans lesquelles l'enfant effectue ses apprentissages. Il est évident que, dans un certain nombre de cas, nous ne connaissons pas encore les méthodes qui permettraient à l'enfant un développement harmonieux et des acquisitions sans failles. Une analyse des objectifs plus fouillée et une meilleure connaissance de la hiérarchie et de l'imbrication des différentes notions devraient conduire à une amélioration de la qualité de l'emploi du temps scolaire.

Il conviendra également de suivre avec beaucoup d'attention l'évolution de la manière dont le maître conçoit son enseignement. Dans la phase d'introduction de la réforme, deux phénomènes jouent un rôle contradictoire. D'une part, l'instituteur hésite à abandonner ses schémas de conduite antérieurs. En particulier, la minimisation du rôle et de la place accordée aux mécanismes de calcul arithmétique tend à provoquer un sentiment d'insécurité voire même d'anxiété. D'un autre côté, l'introduction de notions nouvelles accompagnée de la recherche d'une attitude différente de l'enseignant suscitent, dans la phase initiale, un intérêt bénéfique à l'ensemble de l'activité scolaire. Le risque est grand cependant de voir revenir, après un certain temps, des pratiques d'enseignement rigides, dogmatiques, laissant peu d'initiative et d'autonomie à l'élève, dans lesquelles on se bornera à l'application des anciens modèles d'enseignement sur des contenus différents. Ne voit-on pas déjà, dans certaines écoles, de jeunes enfants réciter une pseudo-théorie des ensembles comme ils apprenaient précédemment la table de multiplication.

Enfin, nous pensons avoir suffisamment mis en évidence les différences considérables qui existent entre les élèves d'une même classe pour rompre une lance en faveur d'une révision profonde du système des contrôles et des notes scolaires. Si nous souhaitons que l'enfant soit confronté à des problèmes qu'il est capable de résoudre, si nous estimons que l'élève ne doit en aucun cas entrer dans une filière d'échecs successifs, la multiplication des épreuves de contrôles collectives et l'attribution de notes où le même critère est appliqué à tous les élèves d'une classe ne résistent pas à un examen un peu attentif. Il est cependant facile de critiquer le sys-

tème. Sommes-nous en mesure de proposer quelque chose de meilleur étant entendu qu'une évaluation périodique des performances de l'élève apparaît comme une nécessité évidente ?

Les recherches devraient s'orienter vers la création de batteries d'épreuves de contrôle de niveau de difficulté graduée qui seraient mises à la disposition du maître de classe. Celui-ci pourrait, en fonction du travail effectué par ses élèves, soumettre chacun d'eux à un travail de contrôle correspondant au niveau supposé atteint. L'information ainsi enregistrée serait que l'élève x a réussi le test de niveau inférieur tandis que les élèves y et z ont réussi respectivement les épreuves de niveau intermédiaire ou supérieur. Le passage d'un niveau à un autre resterait constamment possible et les conditions de promotion ne seraient plus liées à une moyenne annuelle sans signification mais bien au niveau atteint par le sujet à la fin de l'année scolaire. Il y a là, semble-t-il, une des recherches prioritaires à entreprendre pour la consolidation de la conception nouvelle de l'enseignement introduite par le biais de la mathématique.

19.4 La part du maître

Enfin, – last but not least – il faut mettre en exergue le rôle absolument fondamental que joue le maître dans le processus de formation de l'enfant. L'instituteur, qui est et se veut un généraliste, se trouve confronté avec le problème de sa propre formation permanente qui prend des proportions gigantesques. Aujourd'hui la mathématique, demain la langue maternelle, l'environnement, la seconde langue, exigeront une formation et des connaissances nouvelles ainsi que des revirements d'attitude parfois déchirants. Le maître pourra-t-il enseigner la mathématique sans connaître la théorie des ensembles et des nombres, le français sans maîtriser la linguistique, la seconde langue sans pratiquer celle-ci avec aisance ?

Mais toutes ces connaissances lui seront-elles utiles s'il ne possède pas par-dessus tout les qualités pédagogiques, la connaissance de la psychologie des processus cognitifs, les procédés de la conduite d'un groupe, qui le rendront à même de dominer tous les aspects si complexes de son métier ?

Au cours de notre expérimentation, nous avons pu maintes fois vérifier combien, à côté d'informations de caractère mathématique, le maître sollicitait un appui d'ordre didactique concernant la ma-

nière de déterminer et de conduire les activités scolaires, de mieux connaître les possibilités réelles de l'enfant, d'organiser le travail en groupes, de procéder aux évaluations nécessaires, en un mot de vivre quotidiennement son action pédagogique.

Il découle de ceci que, si l'on veut que vivent et se développent les réformes pédagogiques, que s'améliore la qualité de l'enseignement, que se résolvent les problèmes posés par les cas particuliers, le temps du maître isolé dans sa classe et travaillant en individualiste effréné s'avère révolu. D'une part, il faut qu'une animation pédagogique permanente et bien conduite vienne périodiquement vivifier et soutenir l'action pédagogique par l'apport d'idées nouvelles et la réactivation des préoccupations essentielles. D'autre part, il faut que le maître, comme ses élèves, apprenne à travailler en groupe et que le temps nécessaire à sa formation permanente soit réservé dans le cadre de son horaire normal de travail. C'est à ce prix, et à ce prix seulement, que les efforts très importants consentis pour l'amélioration de l'école porteront véritablement tous leurs fruits.

BIBLIOGRAPHIE DES OUVRAGES CITES

1. ALAIN. Propos. Bibliothèque de la Pléiade, Paris 1956 - p. 75-77.
2. A. GRETLER et autres. La Suisse au-devant de l'Education permanente, Payot, Lausanne 1971 - p. 7.
3. J. FOURNIER. Politique de l'éducation, Seuil Paris 1971 - p. 18.
4. R. DOTRENS. Education et démocratie, Delachaux et Niestlé 1946 - p. 51.
5. J. PIAGET. Psychologie et pédagogie, Denoël 1969 - p. 20.
6. R. DOTRENS. Education et démocratie, Delachaux et Niestlé 1946 - p. 94-95.
7. S. ROLLER. La recherche pédagogique dans un monde en accélération. Leçon d'ouverture des cours de l'Ecole des Sciences sociales et politiques de l'université de Lausanne - 1966.
8. S. PAUDLING. Investissement ou bien de consommation in Perspectives de l'éducation, UNESCO, Vol. I, No 1, 1970 - p. 3.
9. J. KOTASEK. Ibid. p.23.
10. E. PLANCHARD. Introduction à la pédagogie, Nauwelaerts Louvain 1963 - p. 129.
11. G. DE LANDSHEERE. Introduction à la recherche pédagogique, Colin-Bourrelle, Paris 1960 - p. 16-17.
12. A. REVUZ. Mathématique moderne, mathématique vivante, OCDL, Paris 1965 - p. 15.
13. L. GROSGURIN. Arithmétique, 6e année, Département de l'Instruction publique, Réimpression de 1958 - p. 3.
14. L. LETERRIER. Programmes Instruction, Hachette Paris 1956.
15. M. DEBESSE et G. MIALARET. Traité des sciences pédagogiques, Vol. 2, Histoire de la pédagogie 1971 - p. 485.
16. P. JACCARD. Les nouvelles exigences de la qualification professionnelle in L'Education, Paris, No 42 - 23.10.69.
17. B. SCHWARTZ. Introduction de l'ouvrage de A. Gretler et autres. La Suisse au-devant de l'éducation permanente, Payot Lausanne 1971 - p. 10.

18. L'initiation mathématique à l'école primaire - XIIIe conférence internationale de l'Instruction publique, Genève 1950 - p. 232 et suiv.
19. Ibid. p. 78.
20. Ibid. p. 149.
21. Ibid. p. 155.
22. Ibid. p. 165.
23. XIIIe conférence internationale de l'Instruction publique - Procès-verbaux et recommandations - Genève BIE 1950 - p. 79-80.
24. Ibid. p. 155 à 157.
25. R. DOTRENS. Programmes et plans d'études dans l'enseignement primaire, Unesco, Monographie sur l'éducation, 1961 - p. 209.
26. L. JERONNEZ. Mathématique moderne à l'école primaire et les réglettes Cuisenaire, Calozet, Bruxelles 1968 - p.7.
27. A. REVUZ in N. PICARD. Des ensembles à la découverte du nombre, OCDL, Paris 1968 - p. 5.
28. M. GLAYMANN. Les mathématiques modernes à l'école élémentaire in Education nationale No 845, Paris 1968 - p. 18.
29. M. DUMONT. Temples et citadelles in Education nationale No 863, Paris 1968 - p. 23.
30. D. JOIRIS. L'enseignement moderne de la mathématique élémentaire in Bulletin de psychologie et d'orientation. No 3, 1968 - p. 139.
34. J. PIAGET. Psychologie et Pédagogie, Denoël 1969 - p. 210-211.
35. Z.P. DIENES. Construction des mathématiques, PUF Paris 1966 - p. 28.
36. Ibid. p. 28.
37. Z.P. DIENES. Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématique, OCDL Paris 1970 - p. 11.
38. J. PIAGET. Fondements scientifiques pour l'éducation de demain in Perspectives, Vol. II, No 1, Unesco, printemps 1972 - p. 21.

39. E. FISCHBEIN. Enseignement mathématique et développement intellectuel in Actes du premier congrès international de l'enseignement mathématique, Lyon 1969, D. Reidel Publishing Co Dordrecht - p. 168.
40. Z.P. DIENES. Premiers pas en mathématique. I Logique et jeux logiques, II Ensembles, nombres et puissances, III Exploration de l'espace et pratique de la mesure, OCDL Paris 1966.
41. J.D. WILLIAMS. Mathematics reform in the primary school Unesco institute for education. Hamburg 1967.
42. FREDERIQUE. Les enfants et la mathématique, Didier Bruxelles 1970 - p. XVIII.
43. Ibid. p. VI-VII.
44. Nuffield Mathematics Project. Chambers and Murray, Londres 1967-1969.
45. MINNEAST. Minnesota School Mathematics and Science Center, 1966-1970.
46. E. FISCHBEIN. Op. cit. - p. 162.
47. R. DROZ et M. RAHMY. Lire Piaget. Dessart, Bruxelles 1972 - p. 148.
48. J. PIAGET. Psychologie et pédagogie Denoël 1969 - p. 70-72.
49. J. PIAGET. Six études de psychologie, Gonthier Genève 1964 - p. 105-113.
50. E. FISCHBEIN. Op. cit. - p. 163.
51. A. REVUZ. 1. Mathématique moderne, mathématique vivante, 5e éd. OCDL, Paris 1970 - p. 49-50.
52. Commission interdépartementale romande de coordination de l'enseignement.
Sous-commission de mathématique.
Projet de programme romand pour les quatre premières années de l'école primaire. Juillet 1971.
53. Commission interdépartementale romande de coordination de l'enseignement.
Projet de programme romand de mathématique. Commentaires.
Janvier 1971 - p. 2.
54. J. CHATEAU. Comment mesurer l'éducation ?
in Education. Paris 27.1.1972 - p. 9.

55. R. HUTIN. L'Enseignement de la mathématique. Service de la recherche pédagogique. Département de l'instruction publique, Genève. Rapports 69.08 - 1969 et 71.08 - 1971.
56. D. MUTTI et M. THURLER. Une épreuve de lecture silencieuse. Service de la recherche pédagogique. Département de l'Instruction publique. Genève 1971.
57. Mathématique. Première année. Méthodologie-commentaires. Office romand des éditions et du matériel scolaires. Economat cantonal Genève 1972.
58. J. PIAGET et D. INHELDER. La genèse des structures logiques élémentaires, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel 1959 - p. 198.
59. Ibid. p. 115.
60. A. MORF et autres. L'apprentissage des structures logiques. Etudes d'épistémologie génétique IX. PUF. Paris 1959 - p. 75.
61. B. MATALON et autres. Implication, formalisation et logique naturelle. Etudes d'épistémologie génétique XVI PUF 1962 - p. 80-86.
62. Z.P. DIENES. L'apprentissage de la logique. OCDL Paris 1966 - p. 14-27.
63. Ibid. p. 26.
64. R. HUTIN- Mathématique. Notes méthodologiques pour la deuxième et la troisième année primaire. DIP Genève 1970 - p. 112-131.
65. M. ROBERT. Un nouvel état d'esprit in la mathématique à l'école élémentaire APM, Paris 1972 - p. 45-53.
66. FREDERIQUE. Les enfants et la mathématique Didier Bruxelles 1970.
67. Z.P. DIENES. Ensembles, nombres et puissances, OCDL, Paris 1969 - p. 62.
68. N. PICARD. Mathématique et jeux d'enfants, Castermann/poche 1970.
69. A. WARUSFEL. Dictionnaire raisonné de mathématiques, Seuil Paris, troisième édition 1966 - p. 304.
70. P. OLERON. Les activités intellectuelles in Traité de psychologie expérimentale, tome VII, L'intelligence. PUF Paris 1963 - p. 42.

TABLE DES MATIERES

Introduction	5
1.Position du problème	5
1.1 Généralités	5
1.2 Rôle de la recherche pédagogique	11
1.3 Objectif de la recherche	15
2.Une société mathématisée	17
2.1 L'évolution des mathématiques	17
2.2 Mathématique et société	20
3.Rôle de la mathématique dans le développement de l'enfant	27

Première partie

LE CONSTAT D'UNE SITUATION

4.Les connaissances des élèves au terme de leur scolarité obligatoire	41
5.Les connaissances des élèves du dixième degré en arithmétique élémentaire	45
5.1 Population	45
5.2 Résultats généraux	48
5.3 Les apprentis : influence de la provenance scolaire	56
5.4 Les apprentis ; influence de l'âge	57
5.5 Le milieu socio-culturel	59
6.L'analyse des items	63
7.L'arithmétique à l'école primaire	69
8.Les épreuves primaires	73
8.1 Paramètres généraux	73
8.2 Analyse des items	83

Deuxième partie

UNE REFORME INDISPENSABLE

9.Les bases d'une réforme	87
9.1 Une pédagogie adaptée à notre temps	87

9.2 Les expériences étrangères	93
Z.P.Dienes	94
Nicole Picard	98
Frédérique Papy	100
The Nuffield Mathematics Project	102
The Minnesota Mathematics and science teaching project (Minnemast)	103
9.3 L'apport de la psychologie génétique	105
10. L'expérience genevoise	113
10.1 Organisation et planification	113
10.2 Formation du corps enseignant	117
10.3 Programme	121
10.4 Moyens d'enseignement	137
11. Le problème de l'évaluation	141
11.1 Position du problème	141
11.2 Les différentes formes d'évaluation	143
12. L'évaluation interne	149
12.1 Les épreuves internes : résultats généraux	150
12.2 Les ensembles : activités de classement	158
12.3 L'emploi des connecteurs logiques "et" et "ou"	163
12.4 L'approche de la structure de groupe	166
12.5 La relation d'un ensemble A vers un ensemble B	168
12.6 Les relations d'équivalence et d'ordre sur données qualitatives	169
12.7 Les relations de parenté	174
12.8 Les relations dans le domaine numérique	175
12.9 L'application dans le domaine numérique	177
12.10 La numération : succession - sériation approximation	179
12.11 La numération : groupements en diffé- rentes bases	180
12.12 La numération : les échanges	181
12.13 L'addition et la soustraction	184
12.14 Technique de l'addition et de la sous- traction	187
12.15 La multiplication et la division	189

12.16 La technique de la multiplication	191
12.17 Position et déplacement	192
12.18 Les activités dans un quadrillage	194
12.19 Commentaires généraux sur l'analyse des items	198

Troisième partie

ESQUISSE D'UNE METHODOLOGIE

13. Généralités	203
13.1 Les objectifs alignés à l'enseignement de la mathématique	203
13.2 Les contraintes du système	207
13.3 Les hypothèses de travail	209
13.4 Le facteur pédagogique	213
13.5 Esquisse d'une méthodologie	216
14. Les ensembles	217
14.1 Notions d'ensembles	217
14.2 Les classifications multiplicatives	218
14.3 Représentations d'ensembles	219
14.4 L'inclusion	221
14.5 L'intersection et la réunion	223
14.6 L'implication	224
14.7 Exemples d'activités sur la notion d'ensembles	226
14.8 Autres matériels	238
14.9 Ensembles basés sur les données numé- riques	241
15. Les relations	243
15.1 La notion de relation et ses repré- sentations	243
15.2 La relation d'équivalence et la rela- tion d'ordre	245
15.3 Le produit cartésien	248
15.4 Exemples d'activités sur la notion de relation	249
15.5 Exemples d'activités sur le produit cartésien	254
15.6 L'application : les opérateurs numé- riques	257

15.6 L'application : les opérateurs numériques	257
15.7 Exemples d'activités sur les relations numériques	267
15.8 Les applications linéaire et affine	277
16. La numération	281
16.1 Le calcul en différentes bases	281
16.2 La notion d'échange	283
16.3 La construction du nombre à virgule	293
17. Les opérations	303
17.1 L'approche de l'idée d'opération	306
17.2 Les opérations arithmétiques	317
17.3 La technique des opérations arithmétiques	326
17.4 Les opérations sur les nombres à virgule	335
18. L'exploration de l'espace	339
18.1 L'élaboration d'un système de coordonnées	339
18.2 Translations, symétries et rotations	344
18.3 La mesure	347
18.4 Arrangements de carrés, aire et périmètre du rectangle	351
18.5 L'approche des figures planes	357
19. Conclusion	361
19.1 Le chemin parcouru	361
19.2 Les problèmes ouverts	363
19.3 Perspectives d'avenir	365
19.4 La part du maître	367
Bibliographie des ouvrages cités	369

